Licence 2, UE 4.4 Institut Villebon-Charpak, Orsay
Mathématiques 2017-2018

Cours TD : les séries numériques

CE QUI MANQUE UN PEU : UNE EXPLICATION EN AMONT DES DIFFERENTS THEOREMES DU COURS : D ALEMBERT, CVA, CSA AVEC DESSINS EXEMPLES (PAS DEMO) JUSTE DE QUOI LEUR RENDRE NATUREL LE RESULTAT. LA ILS NE SONT PAS DEVANCES. PTET METTRE LEQUIVALENT DONNE LE SIGNE ET DU COUP IL SUFFIT DE LE DIRE POUR UN DES 2 SUITES. POUR LES QUESTIONS COEUR : LEUR DIRE DE FAIRE DEUX GPES DE 2 : CHAQUE GPE FAIT UNE REDACTION AU TABLEAU : ILS ECHANGENT ET JE DONNE UN FEEDBACK APRES.
Avant toute chose, n'ayez pas peur de la taille du poly, il est calibré pour plusieurs séances. De plus, beaucoup de place est prise par des parties facultatives et par la partie introductive. Il y a dans ce poly un nombre de questions raisonnable testé sur deux classes auparavant et adapté en conséquence.

Dans ce poly on trouve :

• des questions précédées du symbole ♥ : ces questions donneront lieu à une évaluation par les pairs. En séance, vous arriverez avec une rédaction individuelle de la question, votre voisin corrigera votre rédaction puis chacun présentera au groupe ses corrections avec débat à la clé. Pour vous aider, le poly contient avant chaque question ♥ une liste de points sur lesquels il faut être très attentif lors de la correction.

• des parties **"Pour aller plus loin" qui sont facultatives** pour les personnes souhaitant accéder à davantage de connaissances. Les parties "Pour aller plus loin" ne pourront être traitées par les groupes que si l'unanimité le souhaite. Sinon elles seront remises au travail individuel de l'étudiant.

Vous devez arriver en séance avec :

• des rédactions individuelles complètes pour les questions avec ♥.
• des questions : écrivez toutes les questions que vous vous posez en lisant le poly, vous les poserez toutes en séance au groupe.
• des pistes (mais pas une rédaction complète) pour les questions sans ♥.

Socle de base pour ce chapitre : Le chapitre utilise

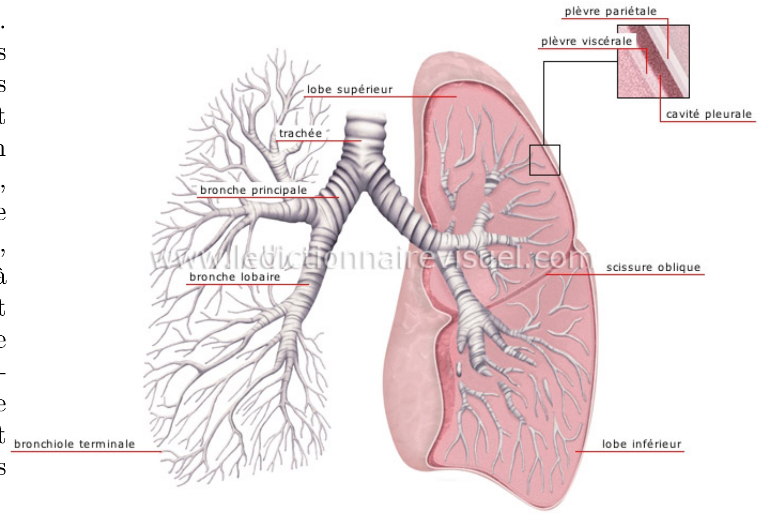
— les suites numériques : monotonie, convergence.

— les relations de comparaison entre suites : majoration, négligeabilité, DL, équivalents.

— les séries numériques.

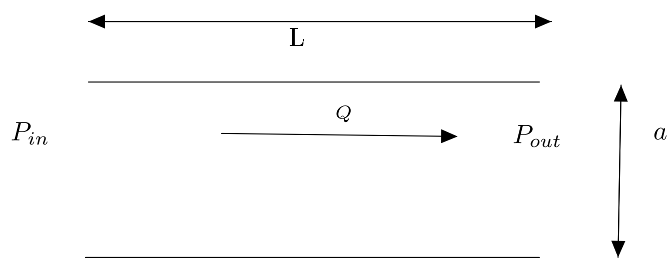
1 Introduction : Des séries pour respirer sereinement

Les mathématiques ont aujourd'hui une importance grandissante en médecine. L'objectif est de substituer aux expériences "in vivo" (sur des patients) des modèles mathématiques représentant fiablement la réalité. La modélisation du poumon humain n'échappe pas à cette tendance, un des objectifs étant la compréhension de différentes maladies respiratoires (asthmes, cancer du poumon) et de la médication à apporter. Il faut cependant avoir à l'esprit qu'un modèle mathématique n'est pas une représentation parfaite de la réalité biologique. C'est une description imparfaite de cette réalité qui se veut suffisamment fiable pour pouvoir en tirer des conclusions biologiques.



Le poumon humain est un arbre composé de 10^{23} générations de bronches dont la taille est décroissante. Ces bronches acheminent l'air inspiré à des alvéoles, dont le rôle est de diffuser l'oxygène inspiré dans le sang : ces alvéoles achèvent la structure. On note P_{in} la pression de l'air en entrée, P_{out} en sortie, Q le débit d'air traversant le poumon. L'air en traversant le poumon est soumis à une résistance notamment dû à son frottement sur les parois bronchiques. Cette résistance a été physiquement mesurée. L'objectif ici est d'étudier un modèle simple permettant de la calculer mathématiquement (et ainsi de voir si le modèle est bon).

Avant de nous intéresser au poumon entier, focalisons-nous sur une bronche :

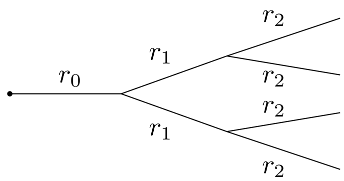


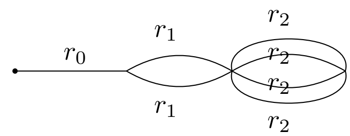
Nous supposons que cette branche vérifie les hypothèses de Poiseuille : le différentiel de pression est proportionnel au débit de l'air Q via la relation

$$P_{in} - P_{out} = RQ, \quad R = \frac{8\mu L}{\pi a^4}$$

où μ la viscosité du fluide (ici l'air), L la longueur et a le rayon de la bronche. Cela suppose notamment que la résistance augmente plus vite lorsqu'on diminue le rayon d'une bronche plutôt que sa longueur. Notons que cette relation est analogue à $U = RI$ pour les circuits électriques (le différentiel de potentiel (pression) est proportionnelle en l'intensité (débit) via la résistance R).

Le modèle étudié fait les hypothèses suivantes : on suppose que chaque bronche se sépare en deux bronches filles comme sur le schéma à trois générations suivant (gauche).





On suppose également que la pression est identique au sein d'une même génération de noeuds (extrémité de bronche). On peut alors identifier tous les noeuds d'une même génération (schéma de droite ci-dessus). Enfin toutes les bronches de la n-ième génération ont une résistance identique

$$r_n = \frac{8\mu L_n}{\pi a_n^4},$$

où L_n et a_n sont les longueur et rayon d'une bronche de n ème génération. L'objectif est de calculer la résistance totale R du poumon.

A la génération 1 du poumon, on a deux résistances r_1 en dérivation. Donc on somme les conductances et la résistance équivalente est

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}} = \frac{r_1}{2}.$$

A la génération 2 du poumon, on a quatre résistances r_2 en dérivation. Donc la résistance équivalente est

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_2}{2^2}.$$

A la n-ième génération, on a 2^n résistances r_n en dérivation. Donc la résistance équivalente est

$$R_n = \frac{1}{\frac{2^n}{r_n}} = \frac{r_n}{2^n}.$$

La résistance totale est la somme sur les 10^{23} générations des résistances de chaque génération puisque ces résistances sont en série. Donc

$$R = \sum_{n=0}^{10^{23}} \frac{r_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{10^{23}} \frac{8\mu L_n}{2^n \pi a_n^4}.$$

Il a été mesuré que les bronches d'une génération à une autre diffèrent d'un rapport de proportionnalité λ de sorte que pour n entier naturel, $a_{n+1} = \lambda a_n$ et $L_{n+1} = \lambda L_n$. Ainsi (a_n) et (L_n) sont deux suites géométriques et $\forall n, \in \mathbb{N}^\star, a_n = \lambda^n a_0, L_n = \lambda^n L_0$ (cf semestre 1). On en déduit que

$$R = \sum_{n=0}^{10^{23}} \frac{8\mu \lambda^n L_0}{2^n \pi \lambda^{4n} a_0^4} = \frac{8\mu l_0}{\pi a_0^4} \sum_{n=0}^{10^{23}} \frac{1}{2^n \lambda^{3n}} = \frac{8\mu l_0}{\pi a_0^4} \sum_{n=0}^{10^{23}} \frac{1}{(2\lambda^3)^n}$$

Ainsi notre respiration dépend de la convergence de la suite

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2\lambda^3)^n}$$

lorsque $N \to +\infty$. Si cette suite diverge, la résistance tend vers $+\infty$ si bien qu'il sera difficile de respirer ! La question qu'on se pose alors est : "Quel λ la nature a-t-elle choisie ? Pour ce λ, la résistance du poumon est-elle raisonnable ?" Nous avons besoin d'un peu de théorie pour répondre à cette question.

Dans le chapitre, $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2 Théorèmes et définitions

2.1 Définitions et exemples

Savoir faire de la section :
• Savoir distinguer somme partielle et série.
• Savoir faire des opérations sur des sommes partielles.
• Savoir déterminer la nature d'une série calculable.

La question sous jacente de la théorie des séries, c'est peut-on sommer une infinité de termes ?

Pour définir les séries, étudions la quantité, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$. On peut s'arrêter de sommer au N ième terme, c'est ce qu'on appelle la somme partielle d'ordre N

$$S_N = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{N} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Par exemple, $S_1 = 1$, $S_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $S_3 = \frac{11}{6}$. **Pour visualiser cette somme partielle, regardez la video "harmonique" reçue par mail.** Puisqu'il existe un S_N par N, on peut former une suite (S_N) qui est la collection des ces sommes partielles :

$$(S_N) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \ldots, \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}, \ldots\right).$$

C'est cette suite qu'on va appeler série numérique et dont voici la définition générale.

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On considère la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ pour $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$.

— La suite $(S_N)_N$ est appelée série de terme général u_n. On la note $\sum u_n$.

— Le terme S_N est appelé somme partielle d'ordre N de la série $\sum u_n$.

1. Voyons si vous avez compris, quels objets parmi ceux-ci sont des sommes partielles, des séries : $\sum \ln(n)$, $\sum_{n=0}^{N}\tan(n+2)$, $\sum_{n=12}^{14}\frac{1}{n+2}$. Qu'est-ce qu'une série pour vous ?
2. **Manipulation :** Considérons $S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(n)}{n}$. Ecrivez cette somme totalement développée. En déduire $S_{N+1}-S_N$, $S_{2(N+1)}-S_{2N}$.

Ainsi une série n'est autre qu'un cas particulier de suite (suite des sommes partielles). On peut donc aussi étudier la convergence de cette suite. Par exemple, pour la série $\sum 1$, la somme partielle d'ordre N est la somme de N termes égaux à 1. La question revient alors à se demander si cette somme tend vers un réel quand on fait tendre le nombre de termes N vers l'infini.

Définition 2

On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles (S_N) converge. On appelle alors somme de la série sa limite $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ diverge si et seulement si (S_N) diverge.
On appelle nature d'une série le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.

Exemple 1

- $\sum 0$ converge car $S_N = \sum_{n=0}^{N} 0 = 0$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
- $\sum 1$ diverge car $S_N = \sum_{n=0}^{N} 1 = N$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$.
- $\sum (-1)^n$ diverge car sa somme partielle vaut alternativement 1 ou 0 et n'a pas de limite. Une série peut donc ne pas avoir de limite.

Un des problèmes fondamentaux des séries est qu'il est pour la majorité impossible de calculer la somme partielle S_N. Pour certaines séries c'est en revanche possible. On a vu les séries de constantes ci-dessus. On va maintenant parler des séries télescopiques. On considère (u_n) une suite réelle, on cherche à étudier la nature de $\sum u_{n+1} - u_n$.

3. ♥ Ecrivez en somme complètement développée et calculez les quantités $S_2, S_3, S_N,\ N \in \mathbb{N}$ pour $S_N = \sum_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n)$. En déduire que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si (u_n) converge.
4. Démontrez que la série $\sum (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$ converge

Il est important de noter que la nature d'une série numérique ne dépend pas du premier terme de la série. En effet donnons nous deux rangs de départ $n_0 < n_1$ et étudions les deux sommes partielles $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=n_1}^{N} u_n$. On a alors que

$$S_N = T_N + \sum_{n=n_0}^{n_1} u_n$$

La somme finie est indépendante de N si bien que (S_N) converge si et seulement si (T_N) converge.

5. **Débat explication :** qu'est selon vous la convergence d'une série, expliquez-vous ce que vous avez compris de ce passage notamment d'où vient l'égalité reliant S_N à T_N.

2.2 Reste d'une série convergente

Proposition 1

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite des restes $(R_N)_N$, $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ est bien définie et tend vers 0 quand $N \longrightarrow +\infty$.

Preuve.

6. *Expliquez pourquoi pour tout N entier naturel $R_N = S - S_N$ où $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et S_N est la somme partielle d'ordre N. En déduire la proposition.*

■

Remarque :

Le reste d'ordre N noté R_N représente l'écart entre la somme partielle d'ordre N et sa limite. En effet, on vient de démontrer que $R_N = S - S_N$. C'est l'analogue de $l - u_n$ pour les suites lorsque l est la limite d'une suite notée u_n.

2.3 Condition nécessaire de convergence

Savoir faire de la section :
• Savoir dire si une série diverge grossièrement.

A partir de cette section nous commençons à nous demander quelles séries convergent ou divergent. Une première question naturelle est : peut-on déduire de la nature d'une suite (u_n) la nature de la série $\sum u_n$ et inversement. Pour intuiter le résultat fondamental qui suit, on peut raisonner ainsi : si on veut espérer qu'une somme infinie de termes puisse être finie, il va falloir que ces termes ne soient pas trop gros.

Proposition 2

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve.

7. *Développer complètement $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et démontrez que $S_{N+1} - S_N = u_{N+1}$. Déduire de cette égalité le fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

■

Remarque : L'erreur impardonnable en copie.

Ce résultat est le résultat de base sur les séries : à connaître impérativement. Attention sa réciproque est totalement fausse. Il existe des suites qui tendent vers 0 mais dont la série diverge. On en donnera un exemple au moment opportun (paragraphe séries de référence).

***Exemple 2: Comment l'utiliser en pratique ? Notion de* divergence grossière.**

En pratique, c'est la contraposée du résultat qui nous intéresse : **Si u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge** : on dit même qu'**elle diverge grossièrement** : vous verrez qu'il existe des séries qui divergent mais dont le terme général tend vers 0.

Etudions la nature de $\sum(-1)^n$: $(-1)^n$ diverge donc ne tend pas vers 0 donc la série $\sum(-1)^n$ diverge (grossièrement).

8. **A vous de jouer.** Repérer parmi les séries suivantes celles qui divergent grossièrement.
   ♥ Ecrivez la rédaction propre pour trois d'entre elles :

$$\sum \frac{1}{n^2},\ \sum n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \sum e^{-n},\ \sum \frac{\ln(n)}{n^2},\ \sum 3^n,\ \sum \frac{-3n^2-\ln(n)}{n^2+20},\ \sum \frac{2^n}{n!}.$$

   Que pouvez-vous dire à ce stade de la nature des autres séries ?

2.4 Séries de référence

Savoir faire de la section :
• Connaître les séries de référence et éventuellement leur valeur.

DONNER UNE INTUITION A L AIDE DU CALCUL INTERGRAL AFIN DE FAIRE COMPRENDRE LE CRITERE SUR ALPHA.

Théorème 1: Séries de Riemann : une référence pour la pratique

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

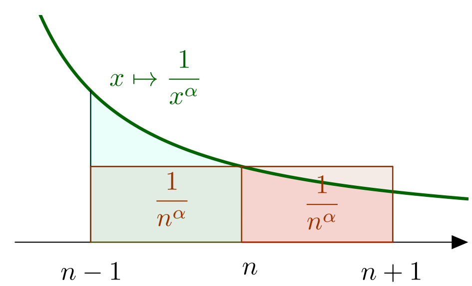
▸ **Pour aller plus loin.**

Preuve.
La preuve consiste à rapprocher l'étude de cette série à celle de l'intégrale de $t \mapsto 1/t^\alpha$. C'est ce qu'on appelle une comparaison série intégrale utilisable sous certaines conditions. Ceci fait l'objet d'une partie pour aller plus loin : la section 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

• *Si $\alpha \leq 0$, quelle est la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?*
• *En utilisant la décroissance sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, montrer que*

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$



Remarquez que cette inégalité est visible sur le dessin ci contre. L'aire bleue est supérieure à l'aire marron qui est supérieure à l'aire rouge.

• *On définit la suite (S_N) par $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que*

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_N \leq 1 + \int_1^{N} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

• *Posons $\alpha = 1$, déduire de l'inégalité précédente que $S_N \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Même question pour $0 < \alpha < 1$.*
• *Démontrer que (S_N) est croissante. Pour $\alpha > 1$, montrer que (S_N) converge.*

■

9. **Vrai ou faux : expliquer.** Est ce que si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\sum u_n$ converge ?

Théorème 2: Séries géométriques : une référence pour la pratique

$\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si elle converge, alors
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

En particulier,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Remarque :

Notez que la convergence de la série géométrique obéit exactement à la même condition sur q que pour les suites géométriques. Ceci n'est pas fortuit puisque si $\sum q^n$ converge alors q^n tend vers 0 d'après la proposition vue précédemment.

Preuve.
On se donne $q \in \mathbb{R}$, $n_0 \leq N$ deux entiers naturels, et on considère $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} q^n$. L'objectif est d'étudier la limite quand $N \to +\infty$ de S_N pour savoir quand $\sum q^n$ converge ou non.

10. *Démontrez en faisant apparaître une somme télescopique que $(1-q)S_N = q^{n_0} - q^{N+1}$. Etudier ensuite la convergence du terme de droite quand $N \to +\infty$ suivant que $|q| < 1$ ou non. Expliquez en quoi cela prouve la proposition (nature et valeur de la série).*

■

Ce théorème permet de répondre à la question de l'introduction sur le poumon humain. La valeur physiologique $\lambda = 0.85$ a été mesurée. Or pour que la série $\sum \left(\frac{1}{2\lambda^3}\right)^n$ converge il faut que $2\lambda^3 > 1$ ce qui revient à $\lambda > 0.79$ approximativement. La nature a donc bien fait les choses : la résistance totale finie de notre modèle de poumon autorise le phénomène de respiration.

Revenons maintenant aux convergences de séries. OK on connait la nature de ces deux séries de référence. Et pour toutes les autres comment étudier leur nature ? Lorsqu'une série n'est pas une série de référence, l'idée est de la "comparer" à ces séries de références. Cette comparaison permettra d'obtenir des informations sur sa nature. La question maintenant est de savoir ce que signifie "comparer" et d'avoir des outils pour "comparer". C'est l'objectif de la prochaine partie.

2.5 Opérations dans l'espace vectoriel des séries

Savoir faire de la section :
• Savoir déterminer la nature de la somme de deux séries.

L'ensemble des séries numériques est un espace vectoriel : une somme de séries reste une série, multiplier une série par un scalaire donne une série. Nous nous posons dans ce paragraphe la question suivante : les notions de convergence/ divergence sont-elles stables par + et par la multiplication par un scalaire ?
Le résultat pour la somme est résumé par le tableau suivant :

$\sum(u_n + v_n)$	$\sum u_n$ converge	$\sum u_n$ diverge
$\sum v_n$ converge	converge	diverge
$\sum v_n$ diverge	diverge	? ?

Ainsi sommer deux séries convergentes donne une série convergente. Sommer une série convergente avec une série divergente donne une série divergente. Attention, ine somme de séries divergentes peut converger ou diverger.
Par exemple, pour $u_n = 1$ et $v_n = 1$, $u_n + v_n = 2$ est le terme général d'une série divergente.
A contrario pour $u_n = 1$ et $v_n = -1$, $u_n + v_n = 0$ est le terme général d'une série convergente.

Multiplier par un scalaire non nul ne change pas la nature d'une série : si $\lambda \neq 0$, $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

11. **Avez-vous compris ?** Quelle est selon vous la nature de

$$\sum \frac{-10}{n^3}, \quad \sum \frac{10}{n^4} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{1.5}{n}$$

Le paragraphe suivant introduit des séries à connaître parfaitement : les séries de Riemann et les séries géométriques. Ce sont deux séries de référence dont on peut démontrer la nature et qui jouent un rôle crucial dans l'étude des autres séries. C'est pourquoi nous les nommons séries de référence.

3 Séries à termes positifs

Dans cette section, $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ c'est-à-dire que (u_n) est une suite réelle. L'objectif de cette section est de présenter une série de théorèmes donnant la nature d'une série numérique **à termes positifs**.

3.1 Critères de comparaison

Savoir faire de la section :
- Savoir majorer simplement une suite ou une fonction.
- Savoir déterminer un équivalent d'une suite ou d'une fonction.
- Savoir trouver la nature d'une série en utilisant l'un des théorèmes de comparaison.

Nous avons vu au premier semestre qu'une suite numérique croissante converge si et seulement si elle est majorée. Ainsi la monotonie d'une suite est un outil très pratique à l'étude de la convergence d'une suite numérique. Voyons ce que cela peut donner pour une série numérique (qui rappelons-le est une suite).

Proposition 4

Si (u_n) est une suite à termes positifs, alors (S_N) la série (suite des sommes partielles) est croissante.

12. Démontrez la proposition précédente.

Ce résultat est la pierre angulaire permettant de démontrer le théorème fondamental très pratique suivant

Théorème 3: de comparaison

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors

1. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve.
Ici je vous laisse le choix soit vous démontrez le théorème par vous mêmes en suivant les questions soit vous regardez la démonstration directement. Dans tous les cas vous répondez à la question de fin.

Notons $U_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ *et* $V_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} v_n$ *les sommes partielles associées.*

En questions

- *Comprendre pourquoi* $\forall N \geqslant n_0, \quad 0 \leq U_N \leq V_N$.
- *Si* $\sum v_n$ *converge, démontrez que* (U_N) *est une suite majorée. Conclure grâce à la proposition 4.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge, démontrez que* (V_N) *tend vers* $+\infty$. *Conclure.*

La démonstration

Puisque $\forall n \geqslant n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$, *alors*

$$\forall N \geqslant n_0, \quad 0 \leq U_N \leq V_N.$$

Dès lors, si $\sum v_n$ *converge, par définition* (V_N) *converge. En particulier* (V_N) *est majorée cad il existe* $M > 0$, *telle que pour tout* N, $V_N \leq M$. *La suite* (U_N) *est donc majorée. Puisque* $u_n \geqslant 0$, (U_N) *est croissante d'après la proposition 4. Donc* (U_N) *converge et la série* $\sum u_n$ *converge.*

A l'inverse, si $\sum u_n$ *diverge, par définition* (U_N) *diverge. Comme elle est croissante, elle tend vers* $+\infty$. *Donc* V_N *tend aussi vers* $+\infty$ *et* $\sum v_n$ *diverge.*

13. **Débat explication** *: Discutez de la preuve, s'il y a un point non clair pour quelqu'un, un des membres doit l'expliquer et la personne qui n'avait pas compris doit réexpliquer et convaincre.*

■

Ce résultat est crucial car il permettra d'obtenir la nature de beaucoup de séries "non de références" en les "comparant" aux séries "de référence". Qu'entend-on par "comparant" ? La comparaison dans ce théorème est localisée dans $0 \leq u_n \leq v_n$. Il s'agit de la majoration de u_n par v_n ou minoration de v_n par u_n qui permet de comparer les séries associées.

Exemple 3: Comment utiliser ce théorème en pratique ?

Appliquons ce théorème pour trouver la nature des deux séries

$$\sum \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}.$$

- $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge.
- $\forall n \geqslant e, \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Or $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge. Donc par comparaison $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

La méthode en elle-même est systématiquement la même : à chaque fois on compare à une série de référence qui ici est $\sum 1/n^\alpha$ ($\alpha = 2$ puis $1/2$). La difficulté essentielle est de trouver la majoration ou la minoration : majoration et minoration ne sont pas obtenues au hasard, donc ne pas mettre n'importe quoi, vous devez être convaincus de sa véracité.

14. ♥ (2 premières) **A vous de jouer** : En vous inspirant des exemples précédents, donnez la nature des quatre séries suivantes : $\sum \frac{1}{n+3^n}$, $\sum \frac{1}{n^{1/10}-1}$, $\sum \frac{1}{n^2(2n+10)}$, $\sum 3\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

Remarque :

• Attention à ne pas oublier l'hypothèse de positivité qui est cruciale, vous avez pu le voir dans la démo du théorème. Son oubli provoquera un retrait de points.

• Le théorème possède des hypothèses qui portent sur les termes généraux u_n, v_n et qui donne un résultat sur les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$. Attention à ne pas me mettre des majorations portant sur les séries ou encore une conclusion du style "donc (u_n) converge".

• Ce théorème a un sens : si on majore par le terme général d'une série divergente, on n'en tire aucune conclusion. De même si on minore par le terme général d'une série convergente.

• L'hypothèse $u_n \leq v_n$ peut être remplacée par $u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et le théorème reste toujours vrai. En revanche, l'hypothèse de positivité doit toujours être donnée !

15. **Voici trois raisonnements faux à ne pas reproduire : trouver l'erreur :**
    (a) On a
    $$\forall n \geqslant 1, \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n^4}.$$
    Or la série $\sum \frac{2}{n^4}$ converge donc $\sum \frac{1}{n}$ converge.
    (b) On a
    $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$
    et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ diverge.
    (c) On a
    $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leq \sum \frac{1}{1+2n^3} \leq \sum \frac{1}{2n^3}$$
    et la série $\sum \frac{1}{2n^3}$ converge. Donc $\sum \frac{1}{1+2n^3}$ converge.

    Quelles règles retenez-vous de chaque raisonnement pour les futurs exercices ?

Le second théorème de comparaison fondamental est le suivant. A la différence du précédent il n'a pas de sens, l'hypothèse porte sur les équivalents. Deux séries, dont les termes généraux sont équivalents et **positifs**, sont de même nature.

Théorème 4: de comparaison à équivalents

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, 0 \leq u_n \text{ et } 0 \leq v_n. \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n. \end{cases}$

Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Exemple 4: Comment utiliser en pratique ce théorème ?

Etudier la nature des séries :

$\sum \frac{1}{n^2+(-1)^n}$	$\sum \frac{1}{n+\ln n}$
• $\frac{1}{n^2+(-1)^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. • $\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n^2} \geqslant 0$ (HYPOTHESE CRUCIALE). • $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^2+(-1)^n}$ converge.	• $\frac{1}{n+\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ car $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$. • $\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n} \geqslant 0$ (HYPOTHESE CRUCIALE). • $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc par comparaison $\sum \frac{1}{n+\ln(n)}$ diverge.

Notez que pour ce théorème, il n'est pas nécessaire de montrer que les deux termes sont positifs car "l'équivalent donne le signe". Si l'un des deux est positif, à partir d'un certain rang, l'autre le sera aussi. Or on a vu que la convergence d'une série est indépendante du rang de départ.

16. ♥ **A vous de jouer.** En vous inspirant des exemples précédents, donnez la nature des séries :

$$\sum \frac{1}{-10n^5+n^{1/4}} \qquad \sum \frac{3^n}{\sqrt{n}+4^n}$$

Exemple 5: Comment utiliser en pratique ce théorème ? 2

Certaines séries mêlent dans leur terme généraux des expressions typiques de développement limité. Par exemple, donnons la nature de la série $\sum \left(\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right)$.
On essaie de trouver un équivalent du terme général.

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Ainsi

$$\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{2n^2} \geqslant 0$ et l'équivalent donne le signe. Comme $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge (c'est une constante fois la série $\sum \frac{1}{n^2}$!), alors $\sum \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$ converge tout comme son opposée $\sum \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$.

17. ♥(une des deux). Donner la nature de la série $\sum \exp(\frac{1}{n}) - 1$ et de $\sum \ln(n^2+1) - \ln(n^2)$.

Tout n'est cependant pas traitable à l'aide de théorèmes de comparaison même si cela règle beaucoup de cas. La partie suivante présente un résultat pratique pour **certaines séries** et qui devrait vous rappeler quelques souvenirs.

3.2 Critère de d'Alembert

Savoir faire de la section :
• Savoir trouver la nature d'une série en utilisant le critère de d'Alembert.

Il existe un critère de convergence très utile en pratique pour un certain type de séries.

Théorème 5: de d'Alembert

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle **strictement positive** telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Alors
• Si $l < 1$, $\sum u_n$ converge.
• Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge.
• Si $l = 1$, on ne peut rien dire.

▸ **Pour aller plus loin**.

Preuve.
On suppose que $l < 1$,
• *Ecrire la définition en quantificateurs de* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. *En déduire que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \leq (l+\epsilon)u_n.$$

• *En déduire que* $\forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+1-n_0}$.
• *Expliquez pourquoi on peut trouver* ϵ *tel que* $l+\epsilon < 1$. *En déduire que* $\sum u_n$ *converge grâce au théorème de comparaison.*
• *Débrouillez-vous pour résoudre le cas* $l > 1$ *: vous minorerez* u_{n+1} *au lieu de le majorer.* ■

Exemple 6: Comment l'utiliser en pratique ? Sur quelles séries ?

• Ce critère s'utilise en pratique sur des séries de type produit comprenant des termes comme $a^n, n!, n^n$ car le quotient u_{n+1}/u_n va être relativement simple à calculer pour ces termes.

• Etudions la nature de $\sum n^2 2^n$. Posons $u_n = n^2 2^n$.
$\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{n^2 2^n} = \frac{(n+1)^2 2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

D'après le critère de d'Alembert, $\sum n^2 2^n$ diverge.

18. ♥ **A vous de jouer** Donnez la nature de $\sum \dfrac{2^n}{n!}$, $\sum 0.5^n \ln(n)$.
19. Appliquer le critère de d'Alembert aux séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Quelle conclusion tirez-vous de cette question ?
20. **Trouver l'erreur :** Soit la suite (u_n) définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{n} \geqslant 0.$$

Or $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} < 1$ donc par le théorème de d'Alembert, $\sum \dfrac{1}{n}$ converge.

21. Récapitulons : on vous demande d'étudier une série à termes positifs, quelle démarche proposez-vous ?

Nous avons vu comment déterminer la nature d'une série à terme général positif. Seulement, il existe énormément de séries dont le terme général n'est pas de signe constant comme par exemple

$$\sum \frac{\sin n}{n^2}$$

est-il positif ? Que faire alors pour cette série ? L'idée est de se ramener à ce qu'on sait faire c'est-à-dire aux séries positives grâce à la notion de convergence absolue.

3.3 Convergence absolue

Savoir faire de la section :
• Savoir trouver la nature d'une série en utilisant le théorème de convergence absolue.

On revient à $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition 3: de la convergence absolue

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Cette notion est particulièrement utile car elle implique la convergence de la série.

Théorème 6: de convergence absolue (admis)

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, Si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Remarque :

• Ainsi la convergence absolue est plus forte que que la convergence puisqu'elle l'entraîne.

• **La réciproque est fausse** : Il existe des séries qui converge mais qui ne convergent pas en valeur absolue. On en verra un exemple dans le paragraphe suivant.

Exemple 7: Comment utiliser ce théorème en pratique ?

L'idée si le terme général d'une série n'est pas de signe constant est de prendre la valeur absolue et d'utiliser les théorèmes applicables aux séries positives. Etudions la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+2}$. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2}$.

• $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc par comparaison $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

22. ♥(les deux dernières) **A vous de jouer.** Quelle est la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, $\sum \frac{\cos(\ln(n)n^2)}{n^2}$,$\sum \sqrt{n}(2x)^n$, $x \in \mathbb{R}$?

Malheureusement, on ne peut pas déterminer la nature de toute série de signe non constant avec ce théorème car il existe des séries non convergentes absolument mais qui converge. On appelle ces séries des séries **semi convergentes**. La partie qui suit en donne un exemple célèbre : les séries alternées.

4 Séries alternées

Savoir faire de la section :
• Savoir trouver la nature d'une série en utilisant le critère des séries alternées.

Qu'est-ce qu'une série alternée ? Une série alternée est une série dont le signe alterne : elle est de la forme $\sum(-1)^n u_n$ où u_n est positif pour tout entier naturel n. Par exemple $\sum(-1)^n n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ sont deux séries alternées. Dans le premier cas $u_n = n$ et dans le second cas $u_n = 1/n$: à chaque fois ces termes sont positifs, l'alternance du signe est due au $(-1)^n$ qui vaut tour à tour 1 puis -1.

Quand une telle série va-t-elle converger ? La série peut converger absolument auquel cas elle converge. Par exemple, vous avez montré que pour $\alpha > 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument. Cependant, il existe des séries alternées qui convergent sans converger absolument.

Théorème 7: Critère des séries alternées

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, une suite positive, décroissante et qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Preuve.
Ici je vous laisse le choix soit vous démontrez le théorème par vous mêmes en suivant les questions soit vous regardez la démonstration directement. Dans tous les cas vous répondez à la question de fin.

On considère la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n.$$

En questions • *Démontrer que* (S_{2N}) *est une suite décroissante et que* (S_{2N+1}) *est une suite croissante.*

• *En déduire que* (S_{2N}) *et* (S_{2N+1}) *sont adjacentes. Expliquer en quoi cela prouve la proposition.*

La démonstration
L'idée de la preuve consiste à montrer que (S_N) *converge en montrant que* (S_{2N}) *(suite des pairs) et* (S_{2N+1}) *(suite des impairs) convergent vers une même limite. Pour cela, on montre que* (S_{2N}) *et* (S_{2N+1}) *sont adjacentes car alors elles convergeraient vers une même limite et le théorème serait prouvé. L'idée derrière ce choix des suites de pairs et d'impairs est que pour* N *pair on ajoute un terme positif et pour* N *impair, un terme négatif (***voir la vidéo "alternee"***). Ainsi ces ajouts vont se compenser et permettre la convergence contrairement à* $\sum 1/n$ *où on ajoute que du positif !*

Pour $N \in \mathbb{N}$,

$$S_{2N+2} - S_{2N} = \sum_{n=0}^{2N+2} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n = u_{2N+2} - u_{2N+1} \leq 0.$$

car (u_n) *est décroissante et*

$$S_{2N+3} - S_{2N+1} = \sum_{n=0}^{2N+3} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n = -u_{2N+3} + u_{2N+2} \geqslant 0.$$

Donc (S_{2N}) *est une suite décroissante et que* (S_{2N+1}) *est une suite croissante.*
Soit $N \in \mathbb{N}$, *il reste à montrer que* $S_{2N+1} - S_{2N}$ *est de limite nulle quand* $N \to +\infty$.
Or

$$S_{2N+1} - S_{2N} = \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n = -u_{2N+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc ces deux suites sont bien adjacentes ce qui achève la preuve.

23. **Débat explication.** *Expliquez-vous cette démonstration, levez les points d'incompréhension de tous.*

■

Exemple 8: Comment utiliser ce théorème en pratique ?

Etudiez $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
On applique le critère des séries alternées en posant pour n dans $\mathbb{N}^\star$, $u_n = 1/n$:
• $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n \geqslant 0$.
• (u_n) est une suite décroissante.
• $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc d'après le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

24. ♥ **A vous de jouer.** Etudiez $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $0 < \alpha \leq 1$, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

25. Ce critère est-il applicable à
$$\sum \frac{(-1)^n(-2)^n}{n!}$$
Pourquoi je pose cette question à votre avis ?

26. **Enigme :** Considérons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors $\sum u_n$ converge d'après le critère des séries alternées (à vous de le faire en exo) et $\sum v_n$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$). On en déduit que $\sum u_n + v_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une divergente. Par ailleurs $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Donc par comparaison à équivalents, comme $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n + v_n$ converge. On a donc montré que $\sum u_n + v_n$ converge et diverge ! Où se situe l'entourloupe ?

5 Synthèse

Savoir faire de la section :
• Savoir repérer le critère adapté à l'étude d'une série.

27. On vous donne une série positive, faire une liste des théorèmes utilisables pour déterminer sa nature.

28. Rédigez une démarche générale de détermination de la nature d'une série quelconque : cette question doit déboucher sur une fiche méthode.

29. Attaquez le TD : l'exercice classique sur les séries numériques.