Cours TD : les séries numériques

1 Introduction : Des séries pour respirer sereinement

2 Théorèmes et définitions

2.1 Définitions et exemples

1. $\sum_{n=0}^{N} \tan(n+2)$, $\sum_{n=12}^{14} \frac{1}{n+2}$ sont des sommes partielles, $\sum \ln(n)$ est une série. Une série est une suite, c'est la suite des sommes partielles.

2. $\bullet S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} + \ldots + \frac{\ln(N-1)}{N-1} + \frac{\ln(N)}{N}$,

   $\bullet S_{N+1} - S_N = \frac{\ln(N+1)}{N+1}$,

   $\bullet S_{2(N+1)} - S_{2N} = S_{2N+2} - S_{2N} = \frac{\ln(2N+2)}{2N+2} + \frac{\ln(2N+1)}{2N+1}$.

3. $\bullet S_2 = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) = u_3 - u_0$,

   $\bullet S_3 = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) = u_4 - u_0$,

   De même, pour N entier naturel quelconque,

   $\bullet S_N = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_N - u_{N-1}) + (u_{N+1} - u_N) = u_{N+1} - u_0$, $N \in \mathbb{N}$.

   • Comme u_0 est fixe, on en déduit que S_N converge si et seulement si (u_{N+1}) converge si et seulement si (u_n) converge.

4. D'après la question précédente, comme $(1/n)$ est une suite qui converge vers 0 alors la série $\sum(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n})$ converge.

5. **débat explication**

2.2 Reste d'une série convergente

6. On a

$$S_N + R_N = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$$

d'où l'égalité. Par définition, si $\sum u_n$ converge alors S_N tend vers S donc R_N tend vers 0.

2.3 Condition nécessaire de convergence

7. $\forall N \geqslant 1, S_N = S_{N-1} + u_N$. Si la série converge, par définition S_N converge vers une limite S. Il en est de même pour S_{N-1}. Alors u_N tend vers $S - S = 0$.

8. Les séries qui divergent grossièrement car leur terme général ne tend pas vers 0 sont :

$$\sum n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \sum 3^n, \quad \sum \frac{-3n^2 - \ln(n)}{n^2 + 20}.$$

Voici les justifications :

- $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sum n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.
- $3^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum 3^n$ diverge.
- $\frac{-3n^2 - \ln(n)}{n^2+20} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-3n^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -3$ donc $\frac{-3n^2 - \ln(n)}{n^2+20} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3$. Donc $\sum \frac{-3n^2 - \ln(n)}{n^2+20}$ diverge.

Attention, cette proposition de dit rien sur la nature des autres séries : si un terme général tend vers 0, la série associée peut converger ou diverger (voir par exemple $\sum 1/n$ et $\sum 1/n^2$.

2.4 Séries de référence

Théorème 1 : Séries de Riemann : une référence pour la pratique

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

▸ **Pour aller plus loin.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

- Si $\alpha \leq 0$, quelle est la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

Si $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

- En utilisant la décroissance sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Remarquez que cette inégalité est visible sur le dessin ci contre. L'aire bleue est supérieure à l'aire marron qui est supérieure à l'aire rouge.

Soit $n \geqslant 2$,

$$\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

L'inégalité de droite se montre par un raisonnement analogue sur $[n-1, n]$.

- On définit la suite (S_N) par $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_N \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Soit $N \geqslant 2$. L'inégalité précédente est vrai pour tout n entier supérieur ou égal à 2. On somme donc ces inégalités de 2 à N.

$$\sum_{n=2}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Les termes extrêmes de l'inégalité se simplifient par la relation de Chasles :

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour retrouver S_N, il ne reste plus qu'à ajouter le premier terme cad 1 à tous les membres de l'inégalité.

- Posons $\alpha = 1$, déduire de l'inégalité précédente que $S_N \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Même question pour $0 < \alpha < 1$.

D'après la question précédente, on a pour $\alpha = 1$,

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{t} \leq S_N.$$

Autrement dit

$$\forall N \geqslant 2, \quad 1 + \ln(N+1) - \ln(2) \leq S_N.$$

Le terme de gauche tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$. Il en est de même donc pour S_N.

Même raisonnement sauf que la primitive est $\dfrac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}$. A vous de jouer.

• Démontrer que (S_N) est croissante. Pour $\alpha > 1$, montrer que (S_N) converge.

✂ -

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$, $S_{N+1} - S_N = \dfrac{1}{(N+1)^\alpha}$. Cette quantité est positive donc (S_N) est croissante.

- ✂

✂ -

Cette fois on utilise le côté droit de l'inégalité :

$$\forall N \geqslant 2, \quad S_N \leq 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Donc

$$\forall N \geqslant 2, \quad S_N \leq 1 + \frac{1}{(1-\alpha)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, le terme de droite converge et est donc borné et donc majoré.

Ainsi (S_N) est une suite croissante majorée donc converge.

- ✂

9. **FAUX À BANNIR !** La proposition précédente n'a pas de réciproque. Si le terme général tend vers 0, **on ne peut rien dire.** Par exemple, $(1/n)$ et $(1/n^2)$ tendent toutes deux vers 0 mais $\sum 1/n$ diverge alors que $\sum 1/n^2$ converge.

10. Premièrement, si $q = 1$, $\sum q^n = \sum 1$ diverge car le terme général ne tend pas vers 0. Supposons maintenant $q \neq 1$.

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geqslant n_0, \quad (1-q)S_N = \sum_{n=n_0}^{N} (1-q)q^n = \sum_{n=n_0}^{N} (q^n - q^{n+1})$$

Ceci est une somme télescopique, tous les termes intermédiaires s'annulent, ne reste que les termes extrémaux. Donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, N \geqslant n_0, \quad (1-q)S_N = q^{n_0} - q^{N+1}.$$

Or si $q \neq 1$, la suite géométrique q^{N+1} converge si et seulement si $|q| < 1$ auquel cas sa limite est 0. On en déduit que pour $q \neq 1$, $(1-q)S_N$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et sa limite est q^{n_0}. Comme par ailleurs $(1-q)S_N$ tend vers $(1-q)\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n$ alors par unicité de la limite,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

2.5 Opérations dans l'espace vectoriel des séries

11. $\sum \frac{1.5}{n}$ divergent (on multiplie par une constante non nulle une série divergente). $\sum \frac{-10}{n^3}$ converge (on multiplie par une constante une série de Riemann convergente). $\sum \frac{10}{n^4} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente ($\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ série de Riemann divergente).

3 Séries à termes positifs

3.1 Critères de comparaison

12. $\forall N \geqslant 0, S_{N+1} - S_N = u_N \geqslant 0$. Donc (S_N) est une suite croissante.

13. **Débat explication**

14. $\sum \frac{1}{n+3^n}, \sum \frac{1}{n^{1/10}-1}, \sum \frac{1}{n^2(2n+10)}, \sum 3\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

- $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leq \frac{1}{n+3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ (car $3^n + n \geqslant 3^n$). Or $\sum \frac{1}{3^n} = \sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge (série géométrique de raison dans $]-1,1[$). Donc par comparaison $\sum \frac{1}{n+3^n}$ converge.
- $\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leq \frac{1}{n^{1/10}} \leq \frac{1}{n^{1/10}-1}$ (car $n^{1/10} - 1 \leqslant n^{1/10}$). Or $\sum \frac{1}{n^{1/10}}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1/10 \leq 1$). Donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^{1/10}-1}$ diverge.

- $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leq \frac{1}{n^2(2n+10)} \leq \frac{1}{2n^3}$ (car $2n + 10 \geqslant 2n$). Or $\sum \frac{1}{2n^3}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$). Donc par comparaison $\sum \frac{1}{n^2(2n+10)}$ converge.
- $\forall n \geqslant e, \quad 0 \leq \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 3\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ (car $\forall n \geqslant e, \ln(n) \geqslant 1$). Or $\sum \frac{3}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1/2 \leq 1$). Donc par comparaison $\sum 3\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

15. (a) Il faut remplacer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leq \sum \frac{1}{1+2n^3} \leq \sum \frac{1}{2n^3}$$

par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leq \frac{1}{1+2n^3} \leq \frac{1}{2n^3}.$$

En effet, les hypothèses du théorème portent sur le terme général des séries et non pas sur les séries elles-mêmes.

(b) L'erreur réside dans le : Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ diverge. D'abord elle ne diverge pas (c'est une série de Riemann convergente). L'argument pour parvenir à cette conclusion est fallacieux Le théorème stipule qu'il faut minorer par un terme de série divergente pour conclure à la divergence. Ici, on a maoré par un terme de série divergente ($\frac{1}{n}$), ce qui ne permet pas de conclure.

(c) Voilà pourquoi l'hypothèse de positivité est cruciale : la série $\sum \frac{2}{n^4}$ converge et pourtant $\sum -\frac{1}{n}$ diverge. Le théorème ne s'applique pas si les deux termes généraux ne sont pas positifs ! C'est un bon exemple pour justifier pourquoi j'insiste lourdement sur la positivité.

Quelles règles retenez-vous de chaque raisonnement pour les futurs exercices ?

- Il faut majorer par le terme général d'une série convergente ou minorer par le terme général d'une série divergente et pas l'inverse !
- Ne jamais oublier la positivité.

16. **Remarque importante :** La première série de cette question a son terme général équivalent à un terme négatif ce qui en principe devrait faire échouer le théorème de comparaison. Cependant, ce théorème est valable en réalité pour des termes **de signe constant.** La raison est la suivante : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec $u_n \leq 0$ et $v_n \leq 0$ alors $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ avec $-u_n \geq 0$ et $-v_n \geq 0$. Ainsi $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont de même nature grâce au théorème de comparaison et donc $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont aussi de même nature. Le vrai cas où le théorème est impuissant est celui où le terme général change de signe comme pour $(-1)^n/n$ par exemple.

- $\frac{1}{-10n^5 + n^{1/4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{10n^5}$. Or $\forall n \geqslant 1, -\frac{1}{10n^5} \leqslant 0$ et l'équivalent donne le signe. On sait aussi que $\sum \frac{1}{10n^5}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 5 > 1$). Donc $\sum \frac{1}{-10n^5 + n^{1/4}}$ converge.
- $\frac{3^n}{\sqrt{n} + 4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3^n}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Or $\forall n \geqslant 0, \left(\frac{3}{4}\right)^n \geqslant 0$ et l'équivalent donne le signe. On sait aussi que $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ converge (série géométrique de paramètre $q = 3/4 \in]-1, 1[$). Donc $\sum \frac{3^n}{\sqrt{n} + 4^n}$ converge.

17. • On essaie de trouver un équivalent. Une bonne façon de trouver un équivalent est d'effectuer un DL lorsqu'un fonction "classique" apparait. L'équivalent est alors le premier terme du DL obtenu. La fonction classique est ici $x \mapsto \exp(x)$ dont on connait le DL en 0. On fait un DL de exp au voisinage de 0 puisque $1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\exp(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Donc

$$\text{exp}(\frac{1}{n}) - 1 = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Donc

$$\text{exp}(\frac{1}{n}) - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{n} \geqslant 0.$$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$) alors par comparaison $\sum \text{exp}(\frac{1}{n}) - 1$ diverge.

•

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \text{ln}(n^2+1) - \text{ln}(n^2) = \text{ln}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \text{ln}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Ainsi

$$\text{ln}(1 + \frac{1}{n^2}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \frac{1}{n^2} \geqslant 0$ et l'équivalent donne le signe. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), alors $\sum(\text{ln}(n^2+1) - \text{ln}(n^2))$ converge.

3.2 Critère de d'Alembert

▸ **Pour aller plus loin.** On suppose que $l < 1$,

• Ecrire la définition en quantificateurs de $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. En déduire que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \leq (l+\epsilon)u_n.$$

Par définition de la convergence d'une suite

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \epsilon.$$

Donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad l - \epsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \epsilon.$$

L'inégalité de droite revient à prouver ce qui est demandé.

• En déduire que $\forall n \geqslant n_0, u_{n+1} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+1-n_0}$.

C'est une récurrence à partir de n_0 !

• Initialisation pour $n = n_0$: $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)$, d'après la question précédente. Or $n+1-n_0 = 1$.

• Supposons qu'au rang n, $u_{n+1} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+1-n_0}$.

But : $u_{n+2} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+2-n_0}$.

Or $u_{n+2} \leq (l+\epsilon)u_{n+1} \leq (l+\epsilon)u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+1-n_0}$, la dernière égalité résultant de l'hypothèse de récurrence.

Donc $u_{n+2} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+2-n_0}$.

• Expliquez pourquoi on peut trouver ϵ tel que $l+\epsilon < 1$. En déduire que $\sum u_n$ converge grâce au théorème de comparaison.

Tout simplement car $l < 1$: il suffit de prendre $\epsilon < 1 - l$.

Comme $(l+\epsilon)^{n+1-n_0} = (l+\epsilon)^{1-n_0}(l+\epsilon)^n$ et que $0 < l+\epsilon < 1$, alors la série géométrique $\sum (l+\epsilon)^{1-n_0}(l+\epsilon)^n$ (n_0 est fixé !). Sachant que

$$\forall n \geqslant n_0, 0 < u_{n+1} \leq u_{n_0}(l+\epsilon)^{n+1-n_0},$$

alors par comparaison $\sum u_n$ converge.

• Débrouillez-vous pour résoudre le cas $l > 1$: vous minorerez u_{n+1} au lieu de le majorer.

L'idée est, à la première question, de garder l'inégalité de gauche. Ainsi de manière identique, on montre que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, (l-\epsilon)u_n \leq u_{n+1}.$$

La récurrence donne alors que

$$\forall n \geqslant n_0, u_{n_0}(l-\epsilon)^{n+1-n_0} \leq u_{n+1}.$$

Comme $l > 1$, on choisit ϵ tel que $l - \epsilon > 1$ et on a ainsi minoré u_n par le terme général d'une série géométrique divergente. Ceci permet de conclure par comparaison que $\sum u_n$ diverge.

18. • $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, u_n > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!2^{n+1}}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le critère de d'Alembert, $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge.

• $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, u_n > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0.5^{n+1}\ln(n+1)}{0.5^n \ln(n)} = \frac{0.5\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.5.$$

D'après le critère de d'Alembert, $\sum 0.5^n \ln(n)$ diverge.

19. Ces deux termes sont bien strictement positifs pour tout n entier naturel. Par ailleurs $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc on ne peut rien dire.

Notons que $\sum 1/n$ diverge alors que $\sum 1/n^2$ converge. Ceci confirme la conclusion du théorème de d'Alembert : on ne peut rien dire.

20. L'erreur est dans

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

La subtilité du critère réside dans le passage à la limite : c'est cette limite qui doit être inférieure stricte à 1 et pas le terme général ! Ne pas passer à la limite donne ici un résultat complètement faux puisque $\sum 1/n$ diverge en réalité.

21. — Je regarde si le terme général tend vers 0. Si ce n'est pas le cas, la série diverge. Si oui j'exécute les étapes suivantes.

— J'essaie de deviner la nature.

— J'ai trois choix : le théorème de comparaison avec majoration/minoration, le théorème de comparaison avec équivalents ou le critère de d'Alembert. Le second théorème s'applique pour des termes généraux simples et lourds à la fois. Le premier sera plutôt appliqué à des termes généraux pas trop horribles. Le critère de d'Alembert est adapté aux termes généraux de "type produit".

3.3 Convergence absolue

22. • On a $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Or $\alpha > 1$. Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument donc converge.

    • $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leq \left|\dfrac{\cos(\ln(n)n^2)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Donc $\sum \dfrac{\cos(\ln(n)n^2)}{n^2}$ converge absolument donc converge.

    • C'est typiquement le genre de séries où le critère de d'Alembert est roi. Sauf que le terme général est réel et que ce critère nécessite un terme général strictement positif.

    On applique donc le critère à $u_n = \left|\sqrt{n}(2x)^n\right|$ qui est strictement positif pour tout n naturel et $x \neq 0$.

    $$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{\sqrt{n+1}(2x)^{n+1}}{\sqrt{n}(2x)^n}\right| = \frac{\sqrt{n+1}|2x|}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |2x|.$$

    Cette limite est strictement inférieure à 1 si et seulement si $x \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$ Donc pour tout $x \neq 0$ dans $]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$, $\sum \sqrt{n}|2x|^n$ converge absolument donc converge.

    Le cas $x = 0$ est trivial car la série $\sum 0$ est la suite nulle qui converge vers 0.

4 Séries alternées

23. **Débat explication.**

24. On applique le critère des séries alternées en posant pour n dans $\mathbb{N}^\star$, $u_n = 1/n^\alpha$:

    • $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_n \geqslant 0$.

    • (u_n) est une suite décroissante puisque α est positif.

    • $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

    Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

    Notez que ce raisonnement vrai pour tout $\alpha > 0$. Seulement, le critère des séries alternées n'est nécessaire que pour $\alpha \leq 1$ puisque pour $\alpha > 1$, on a démontré la convergence absolue (question 34).

    Pour $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$: on pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

    • $\forall n > 2, u_n \geqslant 0$.

    • (u_n) est une suite décroissante puisque $(\ln(n))$ est croissante.

    • $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

    Donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge.

25. Non car (u_n) correspondrait ici à $(-2)^n/n$ qui n'est pas positive! Les hypothèses ont une importance.

Cet exemple doit vous rendre critique : le fait qu'il y ait $(-1)^n$ dans une expression ne signifie pas forcément que le critère des séries alternées s'applique.

26. L'entourloupe se situe dans le fait que le théorème de comparaison à équivalents ne s'applique pas : en effet, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas de signe constant. Ce théorème exige l'hypothèse de positivité de l'équivalent (de signe constant) qui n'est pas satisfaite ici. Voilà pourquoi cette hypothèse est cruciale. Ceci est un exemple de deux séries de terme généraux équivalents mais de nature différente.

5 Synthèse

27. (a) Théorème de comparaison 1 (avec majoration, minoration).

    (b) Théorème de comparaison 2 (avec équivalents).

    (c) Critère de d'Alembert.

28. Voir le schéma distribué en cours.

29.