Projet Arduino : étude des oscillations d’un système masse-ressort

Matthéo ARIGNAVONG, Chloé LEHOUX--BOSQUET, Malcolm REISIN

L2, Institut Villebon-Georges Charpak

Enseignants : Cyril DAUPHIN, Frédérique BOUQUET

Sommaire

Introduction

Ce projet porte sur l'étude des oscillations d'une masse accrochée à un ressort et d'un élastique. Afin d'étudier cette oscillation, un capteur d'accélération a été nécessaire. L'objectif de cette analyse était de déterminer le facteur de qualité du ressort/élastique, c'est-à-dire de mesurer son taux d'amortissement. Or, plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande.

Ce qui amène à se demander quel est le facteur de qualité du ressort étudié. Puis la comparer avec le facteur de qualité d'un élastique.

I - Modélisation du phénomène physique

Afin de modéliser ce phénomène physique les **forces de frottement** ont été considérées comme étant **proportionnelles à la vitesse**. De plus, il a été établi que le système {masse/ressort} et {masse/élastique} était des systèmes amortis. Nous pouvons ainsi pu écrire l'équation suivante :

$$\boxed{m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx}$$

Où x représente l'élongation du ressort, et où γ représente les frottements opposés à la direction de la vitesse.

Cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0 x = 0}$$

Où ω_0 est la fréquence angulaire d'oscillation du système en l'absence de frottements et

$\kappa = \frac{\gamma}{2m}$ est le coefficient d'amortissement en s^{-1}.

Finalement, on se retrouve avec une équation différentielle du second ordre. Etant donné que nous sommes dans le cas d'un régime pseudopériodique alors les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\boxed{x(t) = Ce^{-\kappa t}(cos(\omega t + \varphi))}$$

Où x(t) représente la position de la masse en fonction du temps. C et φ se trouvent à l'aide des conditions initiales. N'ayant pas de déphasage, la valeur φ = 0.

On obtient :

$$\boxed{x(t) = Ce^{-\kappa t}(cos(\omega t))}$$

Ensuite, nous souhaitons trouver la valeur de κ. A l'aide d'un accéléromètre, nous avons effectué l'expérience expliquée ultérieurement. Nous avons ainsi obtenu différentes valeurs d'accélération en fonction du temps suivant le système pseudopériodique.

Afin d'obtenir l'équation de cette fonction, nous avons dérivé l'équation de la position deux fois et avons obtenu celle de l'accélération :

$$\boxed{a(t) = Ce^{-\kappa t}(cos(\omega t)(\kappa^2 - \omega^2) + 2\kappa\omega \sin(\omega t))}$$

Ce qui nous intéresse réellement sur le graph obtenu est la partie anti exponentielle. Cette partie, passant par toutes les amplitudes maximales nous permet ensuite d'obtenir la valeur κ. Elle constitue l'enveloppe de la fonction d'accélération.

<u>Celle-ci est exprimée par :</u>

$$\boxed{a_{max}(t) = Ce^{-\kappa t}}$$

II - Dispositif expérimental

A - Matériels

Pour notre expérience, nous avons utilisé le matériel suivant :

-Mètre

-Ressort

-Masse + crochet

-Potence

-Accéléromètre

-Ordinateur avec programme Arduino

-Scotch

-Carte Arduino

B - Protocole expérimental

1. Accrocher le ressort/élastique en hauteur à l'aide de la potence
2. Ajouter la masse sur le crochet au bout du ressort/élastique
3. Scotcher l'accéléromètre au crochet au niveau de la masse
4. Installer la carte Arduino au niveau du socle de la potence, proche du capteur
5. Brancher la carte au capteur et à l'ordinateur

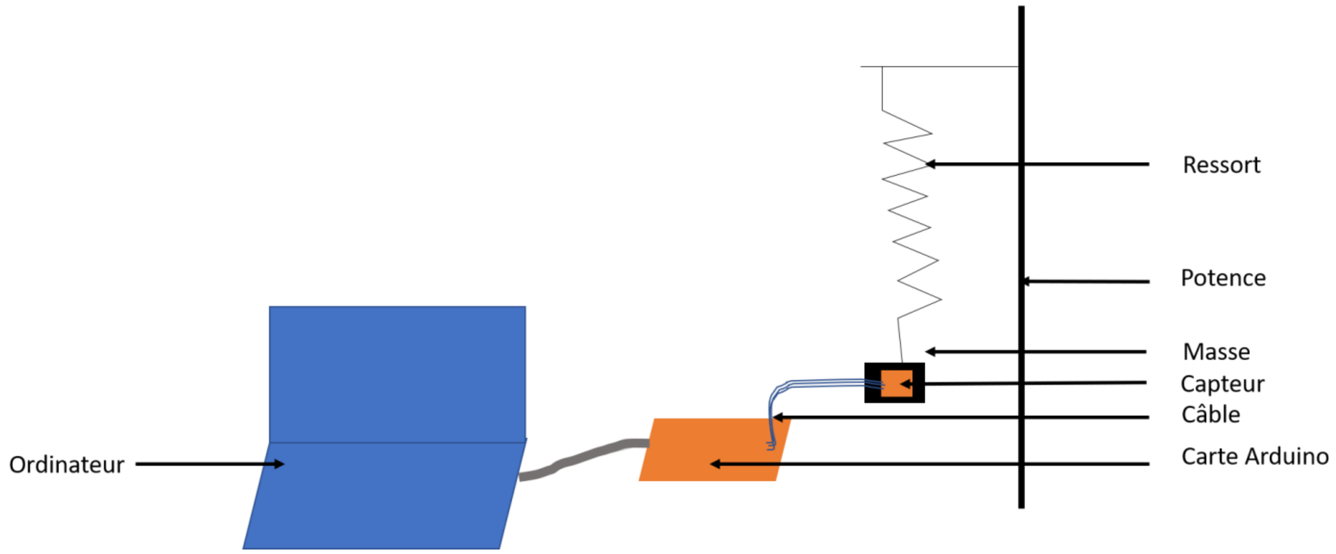
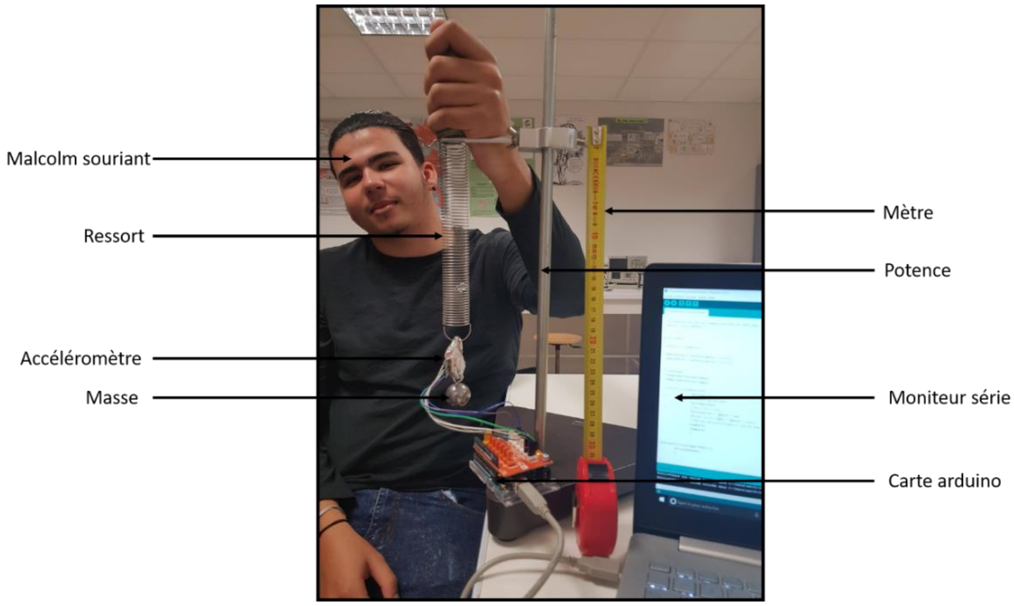
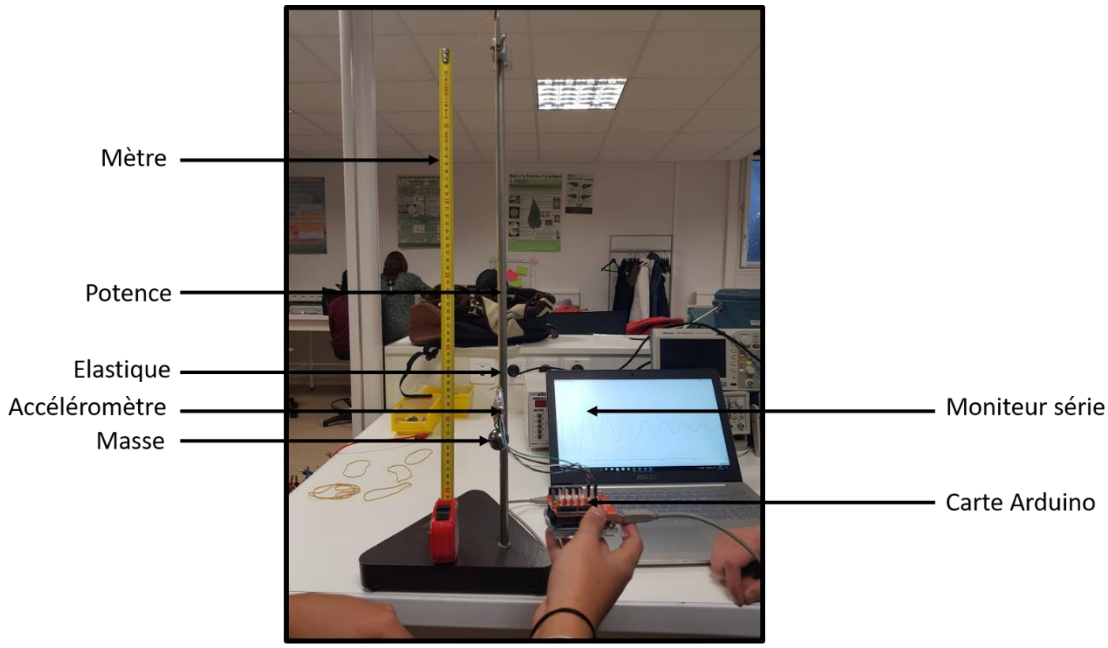


Figure 1 : Schéma théorique du montage

Afin de mettre en évidence ce phénomène, nous avons accroché une masse à l'aide d'un croché au bout du ressort. Le ressort utilisé était un peu déformé, nous avons choisi de suspendre seulement la partie en bon état et de maintenir de reste du ressort à la main pour éviter que cela influe sur l'oscillation. L'accéléromètre a été placé de manière à orienter l'axe y verticalement et scotché au crochet. Pour finir, la carte Arduino a été placée en hauteur et proche du capteur afin d'éviter que les câbles tirent sur la masse et influe sur l'oscillation.



<u>Figure 2</u> : Photo explicative du montage



<u>Figure 3</u> : Photo explicative du montage élastique

III - Présentation des graphs

A - Cas d'une masse accrochée à un ressort

Après avoir obtenue les valeurs de l'Arduino, nous les avons converties en accélération à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{a(t) = \frac{x*9.81}{600}}$$

Ensuite, nous avons tracé la courbe de l'accélération en fonction du temps. Nous savons que l'enveloppe sera de la forme $C.e^{-\kappa t}$. Nous avons donc fait varier les valeurs de κ pour approcher au maximum l'exponentielle des valeurs maximales de l'accélération. Nous avons donc trouvé un **κ = 0.09**. Grâce à nos conditions initiales nous savons qu'à t=0, a(0) = **C = 0.8 m.s^{-1}.**

Nous obtenons donc une enveloppe qui aura pour équation : $\pm \mathbf{0.8 * e^{-0.09*t}}$. Comme le montre le graphique ci-dessous, nous voyons les courbes en orange et en gris qui sont les enveloppes et en bleu l'accélération en fonction du temps.

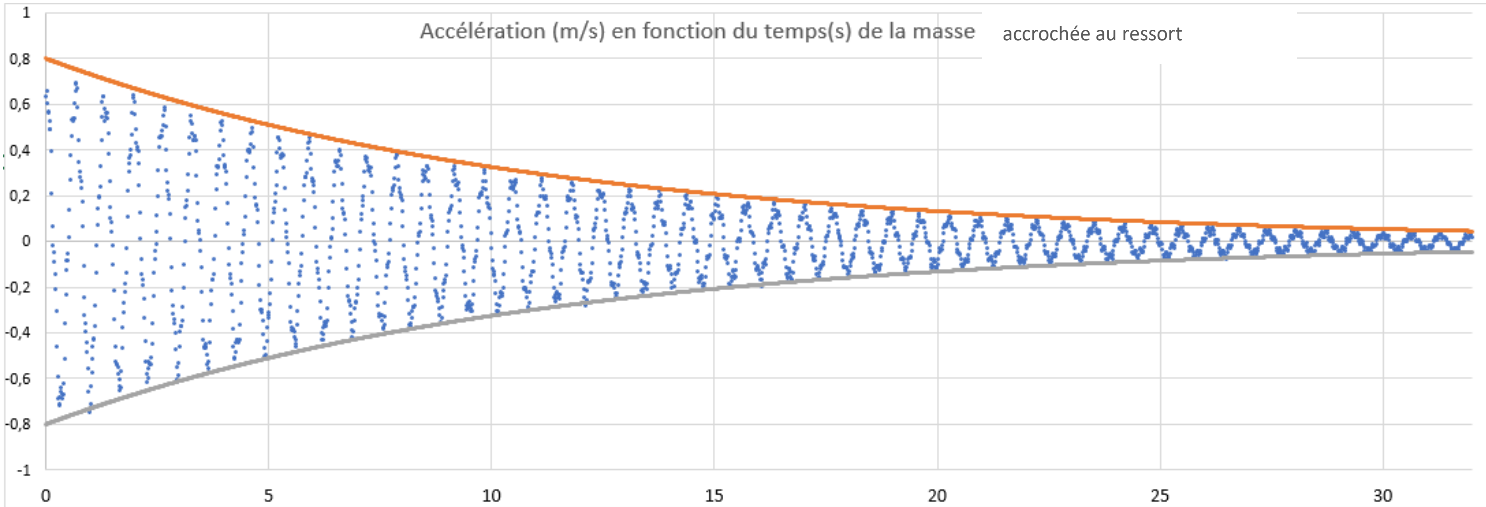


Figure 4 : Courbe de l'accélération en fonction du temps d'une masse accrochée à un ressort

B - Cas d'une masse accrochée à un élastique

Nous avons reproduit la même expérience mais cette fois-ci nous avons remplacé le ressort par un élastique afin de comparer leur coefficient d'amortissement. Comme avec le ressort nous avons recueilli les valeurs de l'accéléromètre et converties ces valeurs en accélération à l'aide de la formule vue précédemment. Ensuite nous avons aussi fait varier les valeurs de κ pour approcher notre enveloppe. Au final nous trouvons un **κ = 0.4** et on savait qu'à t=0, a(0) = **C = 0.5 m.s^{-1}**.

Nous obtenons donc une enveloppe qui aura pour équation : $\pm \mathbf{0.5} * e^{-0.4*t}$. Comme le montre le graphe ci-dessous nous avons l'enveloppe en orange et en gris, et l'accélération en fonction du temps en bleu.

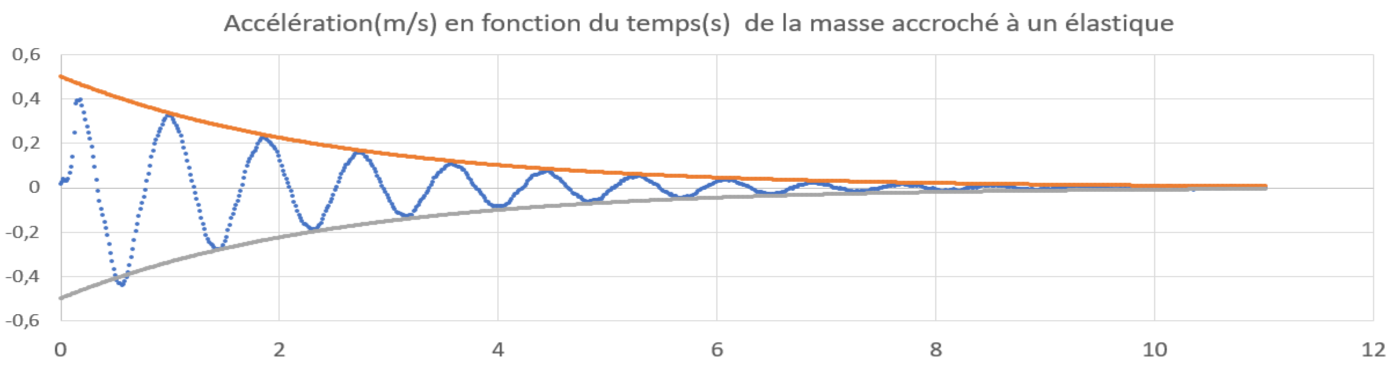


Figure 5 : Graphe de l'accélération en fonction du temps de la masse accrochée à un élastique

C - Discussion sur les courbes obtenues

D'après les courbes obtenues nous voyons bien que le nombre d'oscillations est moins élevées pour l'élastique que pour le ressort. Ce qui peut montrer que le coefficient d'amortissement de notre élastique sera supérieur à celui de notre ressort. Grâce à l'enveloppe que nous avons tracé dans chaque cas nous avons pu en déduire nos valeurs de κ. En effet nous voyons que $K_{élastique} > κ_{ressort}$. On peut donc en déduire que plus notre valeur de κ sera faible plus notre ressort va osciller longtemps, et inversement plus notre valeur de κ sera grande moins notre ressort va osciller longtemps. Donc le temps d'oscillation est inversement proportionnel à notre valeur de κ.

IV - Présentation de l'analyse des résultats

A -Détermination de la pseudo période T

Prenons le cas de l'expérience du ressort :

La période a été déterminé graphiquement.

On sait que : $\boxed{T = \frac{\Delta t}{Nbre\ d'oscillations}}$

Afin de déterminer la pseudo-période la plus précise, nous avons pris une grande valeur de nombre d'oscillations :

➔ $\Delta t = 19{,}641 - 3{,}955 = 15{,}686s$; $Nbre\ d'oscillations = 24$

On obtient : $T_{Ressort} = \frac{15{,}686}{24} = 0{,}654s$

La pseudo-période du ressort est donc de $\boldsymbol{0,654s}$.

En ayant suivi le même raisonnement nous avons trouvé la valeur de la pseudo-période de l'élastique : $\boldsymbol{T_{Elastique}} =$ **0,861s**

B - Détermination des différentes fréquences

1 - Détermination de la fréquence ω

Pour déterminer la fréquence ω nous avons effectué la démarche suivante :

On a : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ ⇔ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$

Prenons le cas de l'expérience du ressort :

On obtient : $\omega_{Ressort} = \frac{2\pi}{0{,}654} = 9{,}61$ s^{-1}

La fréquence du ressort est donc de 9,61 s^{-1}

En ayant suivi le même raisonnement nous avons trouvé la valeur de la fréquence de l'élastique : $\boldsymbol{\omega_{Elastique}} = \boldsymbol{7,30}$ **s^{-1}**

2 - Détermination de la fréquence angulaire ω_0

Pour déterminer la fréquence ω nous avons effectué la démarche suivante :

On a d'après le cours : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \kappa^2}}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2}{T^2}}}$

Prenons le cas de l'expérience du ressort :

Soit : $\kappa_{Ressort} = 0{,}09\ s^{-1}$; $T_{Ressort} = 0{,}654$s

On obtient : $\omega_{0_{Ressort}} = \sqrt{0{,}09^2 + \frac{4\pi^2}{0{,}654^2}} = 9{,}61\ s^{-1} \simeq \omega_{Ressort}$

Cette valeur obtenue n'est pas étonnante étant donné que $\kappa_{Ressort}$ est négligeable devant $\omega_{0_{Ressort}}$.

Il en de même pour l'élastique, soit $\boldsymbol{\omega_{0_{Elastique}} = 7,30s^{-1}}$

3 - Détermination du facteur de qualité Q

Pour déterminer le facteur de qualité Q nous avons effectué la démarche suivante :

On a d'après le cours : $\boxed{Q = \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{2\kappa}}$

Prenons le cas de l'expérience du ressort :

On sait que : $\omega_{0_{Ressort}} = 9{,}61 s^{-1}$; $\kappa_{Ressort} = 0{,}09\ s^{-1}$

On obtient : $Q_{Ressort} = \frac{\mathbf{9{,}61}}{2*0{,}09} = 53{,}41$

En ayant suivi le même raisonnement nous avons trouvé la valeur du facteur de qualité de l'élastique : $\boldsymbol{Q_{Elastique} = 9,12}$

Conclusion

Nous pouvons donc conclure que l'expérience que nous avons réalisée nous a permis de montrer que le coefficient d'amortissement κ est inversement proportionnel à la période d'oscillation de notre système. En effet, plus le coefficient est grand moins le système va osciller et inversement. En effet, notre ressort oscille plus longtemps car sa valeur de κ est plus faible (0.09) que celui de notre élastique (0.4). De plus, nous avons aussi montré que le modèle théorique était proche du modèle réel. Nous pouvons donc utiliser ce modèle pour l'utiliser dans la vie de tous les jours. Par exemple, utiliser le coefficient d'amortissement pour les suspensions d'une voiture.

Mais il y a quand même quelques limites dans notre expérience. En effet, les câbles qui reliaient l'accéléromètre et la carte Arduino augmentaient sûrement le coefficient d'amortissement. De plus, le ressort qu'on a utilisé était quand même un peu usé ce qui modifiait aussi sa force de rappelle.