Fiches de raisonnement

Lexique

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire les hypothèses dans une rédaction : *pour tous les exercices*
2. Identifier et écrire le but dans une rédaction : *pour tous les exercices*

1 Qu'est-ce que ... ?

• **une définition :** C'est simplement donner un nom, une notation à un concept mathématique donné.

• **une propriété, assertion mathématique :** Il s'agit d'une phrase mathématique à laquelle on peut répondre par Vrai ou Faux.

• **un axiome :** Un axiome est un postulat de départ qu'on admet comme vrai et sur lequel on construit notre théorie mathématique.

• **une hypothèse :** Etymologie : Hypo=inférieur, thèse=affirmation. C'est "une affirmation inférieure". Il s'agit en mathématiques d'une propriété qu'on suppose être vraie.

• **un théorème :** C'est un énoncé scientifique démontré grâce à un raisonnement logique construit à partir d'hypothèses de départ. La richesse d'un théorème réside dans la généralité apportée : par exemple le théorème de Pythagore s'applique à tout triangle rectangle et pas un triangle rectangle en particulier.

• **un lemme, une proposition :** c'est la même chose qu'un théorème, le changement de nom traduit seulement un ordre d'importance. Un théorème c'est un résultat plus important qu'une proposition qui est plus important qu'un lemme.

2 Exemples concrets

2.1 Exemples de définition

Définition 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante sur I si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

2.2 Exemples de propriété/assertion

• Des propriétés :

$$1 \leq 2,$$
$$\int_0^1 f(t)dt = 0,$$
$$\forall x \in \mathbb{N}, x^2 < 0.$$

• Des choses qui n'en sont pas :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{N},$$
$$\text{on a } x \in \mathbb{R}.$$

2.3 Exemples d'axiomes

Les axiomes de Péano : Axiome qui permettent de construire les entiers naturels

- L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
- Tout entier naturel n a un unique successeur.
- Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
- Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
- Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

2.4 Théorème, hypothèse

Théorème 1: de Pythagore

Soit ABC un triangle, si ABC est rectangle en B alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

• Il y a une **hypothèse** : ABC est un triangle rectangle en B.
• La conclusion est $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Remarque importante sur les différences entre disciplines : Une hypothèse en maths n'est pas la même chose qu'une hypothèse en biologie. Voici une hypothèse en biologie : *Le marc de café agit positivement sur la croissance de la plante A.* Une traduction dans expérimentale est : *Si on met du marc de café sur la plante A alors cette plante croit.*
En biologie, l'hypothèse correspond à la phrase entière : *Le marc de café agit positivement sur la croissance de la plante A.* En mathématiques, l'hypothèse correspond à ce qu'on suppose (ici ce qui est entre le "si" et le "alors") c'est-à-dire à *On met du marc de café sur la plante.*

Fiche centrale : Comment démarrer face à une question

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire les hypothèses dans une rédaction.
2. Savoir traduire mathématiquement les hypothèses.
3. Identifier et écrire le but dans une rédaction.
4. Savoir traduire mathématiquement le but.
5. Savoir tester un résultat sur des exemples.

Cette fiche est le carrefour de toutes les fiches. Elle présente une méthodologie systématique de réaction face à un exercice. Cette méthodologie est essentielle : elle permet de poser le cadre de l'exercice et ainsi de libérer votre mémoire de travail pour faciliter la genèse d'une idée.

3 Comment réagir

3.1 Les réflexes systématiques

1. Ecrire les hypothèses.
2. Ecrire la traduction mathématique des hypothèses.
3. Ecrire le but.
4. Ecrire la traduction mathématique du but.
5. Observer si les traductions mathématiques des hypothèses et du but nous donnent une idée ou/et s'il nous semble qu'un théorème du cours sera nécessaire.

Exemple 1 $\star$:

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si n est pair alors son carré est pair.

C'est une implication, j'écris l'hypothèse : Supposons que n soit un entier pair.
Je sors de ma connaissance du cours la définition de n pair : Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.
J'écris mon objectif. But : montrer que n^2 est pair,
Je traduis le but grâce au cours : c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 2q$.
J'ai $n = 2p$ et je veux étudier n^2. J'élève donc l'égalité au carré !

Remarque importante : Une fois que vous avez fait ça et que vous avez compris comment résoudre l'exo, référez-vous à la fiche comment rédiger. Notez que l'étape écrite en rose n'est pas exigée sur la copie : elle est là pour vous faire voir quelle est ma pensée lorsque hypothèses et but sont traduits.

3.2 Si un théorème est nécessaire

Pour appliquer un théorème qui solutionnerait le problème, voici les étapes.

1. Identifier les hypothèses de ces théorèmes/définitions à appliquer.
2. Démontrer que chaque hypothèse est vérifiée.

Exemple 1 $\star$:

Théorème de Rolle : Soient a, b deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démontrer que la dérivée de $f : x \mapsto x(1-x)$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

On veut montrer que $f : x \mapsto x(1-x)$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
c'est-à-dire qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
Le but traduit est très proche de la conclusion du théorème de Rolle : j'essaie d'appliquer ce théorème.
Il s'agit de vérifier que : 1) $f(0) = f(1) = 0$, 2) f est continue sur $[0, 1]$, 3) f est dérivable sur $]0, 1[$.
On sait que $f(0) = 0(1-0) = 0$ et $f(1) = 1(1-1) = 0$.
et que f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ car f est un polynôme.

3.3 Si on reste bloqué

1. Chercher des exemples et des contre-exemples.
2. Tenter des choses au brouillon.
3. Dessiner si c'est possible.
4. Lister les théorèmes de cours en lien avec la notion et voir si un des théorèmes de cours se rapproche du but et/ou utilise les hypothèses écrites.
5. Eventuellement diminuer la complexité de la question en se plaçant dans un cas plus simple.

Exemple "Diminuer la complexité d'un problème" :

On dit qu'un ensemble E est stable par $+$ si : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$. L'ensemble $E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ est-il stable par $+$?

On pourrait commencer par l'étudier pour les cas plus simples et lisibles :

• $n = 1$: $E = \{x_1 \in \mathbb{R} | x_1 = 0\}$.
• $n = 2$: $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 0\}$.

4 Exemples

Attention ces rubriques ne donnent pas les rédactions qui sont situées dans la fiche "Comment rédiger". Elles montrent seulement comment on peut réagir à diverses questions. En ce sens, j'écris avant la rédaction la façon dont je raisonne. Notez que je mets en gras les phrases en français et en non gras ce qui sera concrètement sur la copie.

Exemple 2 $\star\star$ **:**

On dit qu'un ensemble E est stable par $+$ si : $\forall u \in E, \forall v \in E, u+v \in E$. Démontrer que si E et F sont stables par $+$ alors $E \cap F$ est stable par $+$.

C'est une implication, j'écris l'hypothèse : Supposons que E et F soit stables par $+$.
Grâce à l'énoncé, je traduis : Alors $\forall u \in E, \forall v \in E, u+v \in E$ et $\forall u \in F, \forall v \in F, u+v \in F$.
J'écris le but : On veut montrer que $E \cap F$ est stable par $+$
Grâce à l'énoncé, je traduis : c'est-à-dire que $\forall u \in E \cap F, \forall v \in E \cap F, u+v \in E \cap F$.
Si on prend deux éléments dans $E \cap F$ ils seront dans E et dans F je vois qu'on pourra leur appliquer l'hypothèse.

Exemple 3 $\star\star$ **:**

Démontrer que pour $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M \Longrightarrow |\int_a^b f(t)dt| \leq M|b-a|.$$

C'est une implication, j'écris l'hypothèse qui est déjà traduite mathématiquement : Supposons que $\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$.
J'écris le but qui est déjà traduit mathématiquement : On veut montrer que $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leq M|b-a|$.
J'ai une inégalité sur f et je veux une inégalité sur l'intégrale de f : je sens qu'il faut intégrer l'inégalité de départ entre a et b et utiliser le fait que l'intégrale soit croissante. Une difficulté est que si j'intègre, je majore $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ et pas $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt|$ mais mon cours me dit que la seconde est plus petite que la première.

4.1 Exemples

Attention ces rubriques ne donnent pas les rédactions qui sont situées dans la fiche "Comment rédiger". Elles montrent seulement comment on peut réagir à diverses questions.

Exemple 1 $\star$ **:**

Déterminer la longueur de AB dans le triangle ABC ci-dessus.

On veut calculer AB.
Il n'y a rien à écrire ici : le but est déjà traduit.
Deux longueurs sont connues et le triangle semble rectangle donc on va appliquer le théorème de Pythagore.
Il s'agit de montrer que le triangle est bien rectangle.
Le triangle est rectangle en C car la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés et que $\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 45° - 45° = 90°$.

Exemple 2 $\star$ **:**

Soit $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) | y' - y = 0\}$. Montrer que $\exp \in F$.

On veut montrer que $\exp \in \{f \in C^1(\mathbb{R}) | y' - y = 0\}$
c'est-à-dire que $\exp \in C^1(\mathbb{R})$ et $\exp' - \exp = 0$.
On calcule la dérivée de exp !

Exemple 3 $\star\star$:

On dit qu'un ensemble E est stable par $+$ si : $\forall u \in E, \forall v \in E, u+v \in E$. Démontrer que $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y=0\}$ est stable par $+$.

On veut montrer E est stable par $+$,
c'est-à-dire que $\forall u \in E, \forall v \in E, u+v \in E$.
Soit $u = (x_1, y_1) \in E$, alors $x_1 + y_1 = 0$.
Soit $v = (x_2, y_2) \in E$, alors $x_2 + y_2 = 0$.
On veut alors montrer que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in E$ c'est-à-dire que $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$.
On calcule donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$ en se servant du fait que $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$.

Fiche : Comment rédiger

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire les hypothèses dans une rédaction.
2. Savoir traduire mathématiquement les hypothèses.
3. Identifier et écrire le but dans une rédaction.
4. Savoir traduire mathématiquement le but.
5. Savoir connecter les étapes d'une preuve.
6. Savoir définir les objets utilisés.
7. Savoir conclure un raisonnement.
8. Savoir citer les résultats de cours, théorèmes, définitions utilisées.

5 Règles

Précisons que ces règles ne s'appliquent pas à tous les problèmes. Par exemple, dans certains problèmes, il n'y a pas d'objets à définir, dans d'autres il n'y a pas d'hypothèses. Précisons également que ces règles ne sont pas à appliquer dans l'ordre. Elles s'entremêlent dans chaque rédaction. Par exemple, "Relier les différentes étapes du raisonnement" intervient tout au long de la rédaction.

Règles	*Eléments de langage*
Définir les objets mathématiques utilisés	• Soit $x \in \dots$ • $\forall x \in \dots$
Ecrire où sont utilisées les hypothèses	**On sait que** **On a que** **Or** **Sachant que** **Comme** **Supposons que**
Ecrire le but	**On veut montrer que** **On veut déterminer**
Relier les différentes étapes du raisonnement	**Alors** **Donc** **On en déduit que** **Par conséquent** **car** **et** **c'est-à-dire**
Ecrire les résultats de cours utilisés	**D'après le théorème** ... **D'après la définition** ... **On va appliquer le théorème** .... **.** **D'après le cours** .... **.**
Conclure	**On a donc prouvé que** **On a montré/démontré que** **Donc** **On en déduit que**

6 Exemples

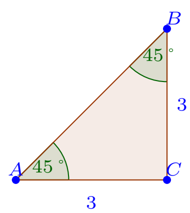
Exemple 1 $\star$:

Démontrer que si un entier est pair alors son carré est pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Supposons que n soit un entier pair.
Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.
But : montrer que n^2 est pair,
c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 2q$.
Or $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. **Ainsi** $q = 2p^2$ convient.
Donc n^2 est pair.

Exemple 2 $\star$:

Déterminer la longueur de AB dans le triangle ABC.



On veut déterminer la longueur de AB.

Pour cela on va appliquer le théorème de Pythagore :

Le triangle est rectangle en C **car** la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés et que $\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 45° - 45° = 90°$.

Donc $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Exemple 3 $\star\star$:

Soit $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) | y' - y = 0\}$**. Montrer que** $\exp \in F$.

On veut montrer que $\exp \in \{f \in C^1(\mathbb{R}) | y' - y = 0\}$
c'est-à-dire que $\exp \in C^1(\mathbb{R})$ et $\exp' - \exp = 0$.
D'après le cours, la fonction exp est bien une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$ **et** $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' - e^x = e^x - e^x = 0$.
Donc $\exp \in F$.

Exemple 4 $\star$:

Résoudre l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$

On veut résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$.
Donc il y a deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$.
Réciproquement $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$.
Donc les solutions de $x^2 - 5x + 6 = 0$ sont 2 et 3.

Exemple 5 $\star$:

Théorème de Rolle : Soient a, b deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démontrer que la dérivée de $f : x \mapsto x(1-x)$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.

On veut montrer que $f : x \mapsto x(1-x)$ s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$.
c'est-à-dire qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
On va appliquer le théorème de Rolle :
Comme $f(0) = 0(1-0) = 0$ et $f(1) = 1(1-1) = 0$.
et que f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ car f est un polynôme.
Alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 6 $\star\star$:

On dit qu'un ensemble E est stable par $+$ si : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$. Démontrer que si E et F sont stables par $+$ alors $E \cap F$ est stable par $+$.

Supposons que E et F soit stables par $+$.
Alors $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$ et $\forall u \in F, \forall v \in F, u + v \in F$.
On veut montrer que $E \cap F$ est stable par $+$
c'est-à-dire que $\forall u \in E \cap F, \forall v \in E \cap F, u + v \in E \cap F$.
Soient $u \in E \cap F$, et $v \in E \cap F$.
D'après le cours $E \cap F \subset E$, **donc** $u \in E$ et $v \in E$.
Comme E est stable par $+$ **alors** $u + v \in E$.
Le même raisonnement montre que $u + v \in F$.
On en déduit que $u + v \in E \cap F$ et $E \cap F$ est donc stable par $+$.

Exemple 7 $\star\star$:

On dit qu'un ensemble E est stable par $+$ si : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$. Démontrer que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ est stable par $+$.

On veut montrer que E est stable par $+$,
c'est-à-dire que $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$.
Soit $u = (x_1, y_1) \in E$, **alors** $x_1 + y_1 = 0$.
Soit $v = (x_2, y_2) \in E$, **alors** $x_2 + y_2 = 0$.
On veut alors montrer que $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in E$ **c'est-à-dire que** $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$.
Or $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$ **car** $x_1 + y_1 = 0$ **et** $x_2 + y_2 = 0$.
Donc $u + v \in E$ et E est stable par $+$.

Exemple 8 $\star\star$ **:**

Démontrer que pour $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **et** $M \in \mathbb{R}_+$**,**

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M \Longrightarrow |\int_a^b f(t)dt| \leq M|b-a|.$$

Supposons que $\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$.

On veut montrer que $|\int_a^b f(t)dt| \leq M|b-a|$.

D'après le cours, l'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire :

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Comme $\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$ et **comme d'après le cours**, l'intégrale est croissante **alors**

$$\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b Mdt.$$

Donc en regoupant ces deux inégalités,

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b Mdt = M|b-a|.$$

Fiche : Comment démontrer une implication/équivalence

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire les hypothèses dans une rédaction.
2. Savoir traduire mathématiquement les hypothèses.
3. Identifier et écrire le but dans une rédaction.
4. Savoir traduire mathématiquement le but.
5. Savoir conclure un raisonnement.
6. Expliciter correctement les étapes de la démonstration d'une implication.
7. Expliciter correctement les étapes de la démonstration d'une équivalence.

7 Qu'est-ce qu'une implication, une équivalence ?

Une implication est une propriété qui part d'une propriété A pour arriver à une propriété B. La propriété A est appelée hypothèse. Voici les différentes formes que peut prendre un énoncé demandant de démontrer une implication :

1. Démontrer que $A \Longrightarrow B$.
2. Démontrer que si A alors B.
3. On suppose que A, démontrer B.

Exemple : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Démontrer que si une fonction est dérivable sur I alors elle est continue sur I. Dans ce cas, A est "une fonction est dérivable sur I" et B est "une fonction est continue sur I".

L'équivalence $A \iff B$ correspond à une double implication. Ainsi montrer que $A \iff B$ c'est montrer que

1. $A \Longrightarrow B$.
2. $B \Longrightarrow A$.

8 Démontrer une implication/équivalence

8.1 La démarche pour démontrer une implication

Appliquons ici les réflexes systématiques **de la fiche centrale** à avoir dans le contexte de la démonstration d'une implication :

1. Ecrire les hypothèses.
2. Ecrire la traduction mathématique des hypothèses.
3. Ecrire le but.
4. Ecrire la traduction mathématique du but.
5. Observer si les traductions mathématiques des hypothèses et du but nous donnent une idée ou/et s'il nous semble qu'un théorème du cours sera nécessaire.
6. Ecrire le raisonnement et conclure.

Exemple 1 ⋆ :

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que si n est pair alors son carré est pair.

Supposons que n soit un entier pair.
Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.
But : montrer que n^2 est pair,
c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 2q$.
J'ai $n = 2p$ et je veux étudier n^2. J'élève donc l'égalité au carré !
Or $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi $q = 2p^2$ convient.
Donc n^2 est pair.

Remarque importante : Il est à noter que le point 6 est celui qui en pratique est noté dans une copie de maths. Cependant les autres points sont souvent cruciaux à la réussite du point 6. Simplement écrire et traduire les données d'un énoncé et le but est source d'inspiration.

Voici les éléments de langage que nous attendons lorsque vous démontrez une implication :

1. Ecrire l'hypothèse de départ : **Supposons que, on suppose que, soit**
2. Ecrire la traduction mathématique de l'hypothèse de départ : **c'est-à-dire que, alors**.
3. Ecrire le but : **Montrons que, on montre que** .
4. Ecrire la traduction mathématique du but : **c'est-à-dire que, ce qui signifie que**.
6. Conclure : **Donc, on en déduit que**.

8.2 La démarche pour démontrer une équivalence

Une équivalence est une double implication. Il s'agit donc d'appliquer deux fois la démarche de l'implication.

1. Ecrire "Montrons $\boxed{\Longrightarrow}$". *(Cf exemple 4 partie 2.3)*
2. Suivre la démarche pour démontrer une implication.
3. Ecrire "Montrons $\boxed{\Longleftarrow}$". *(Cf exemple 4 partie 2.3)*.
4. Suivre la démarche pour démontrer une implication.

8.3 Exemples

Exemple 2 $\star\star$:

On dit qu'un ensemble E est stable par $+$ si : $\forall u \in E, \forall v \in E, u+v \in E$. Démontrer que si E et F sont stables par $+$ alors $E \cap F$ est stable par $+$.

Supposons que E et F soit stables par $+$.
Alors $\forall u \in E, \forall v \in E, u+v \in E$ et $\forall u \in F, \forall v \in F, u+v \in F$.
On veut montrer que $E \cap F$ est stable par $+$
c'est-à-dire que $\forall u \in E \cap F, \forall v \in E \cap F, u+v \in E \cap F$.
Soient $u \in E \cap F$, et $v \in E \cap F$.
D'après le cours $E \cap F \subset E$, donc $u \in E$ et $v \in E$.
Comme E est stable par $+$ alors $u+v \in E$.
Le même raisonnement montre que $u+v \in F$.
On en déduit que $u+v \in E \cap F$ et $E \cap F$ est donc stable par $+$.

Exemple 3 $\star\star$:

Démontrer que pour $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M \Longrightarrow |\int_a^b f(t)dt| \leq M|b-a|.$$

Supposons que $\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$.
On veut montrer que $|\int_a^b f(t)dt| \leq M|b-a|$.
D'après le cours, l'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire :

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Comme $\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M$ et comme d'après le cours, l'intégrale est croissante alors

$$\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b Mdt.$$

Donc en regoupant ces deux inégalités,

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b Mdt = M|b-a|.$$

Exemple 4 $\star\star$:

Soit $z \in \mathbb{C}$, démontrer que $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta} \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

• Montrons $\boxed{\Longrightarrow}$:
Supposons que $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.
On veut montrer que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
Or $\overline{z} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{z}$.
Donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

• Montrons $\boxed{\Longleftarrow}$:
Supposons que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
On veut montrer que $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$.
Or $z\overline{z} = z\dfrac{1}{z} = 1$. Donc $|z|^2 = z\overline{z} = 1$ et comme $|z| \geq 0$ alors $|z| = 1$.
Or d'après le cours $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = |z|e^{i\theta}$.
Donc $z = e^{i\theta}$.

8.4 Des choses essentielles

1. Afin de traduire mathématiquement les hypothèses et le but, il est indispensable de connaître son cours.
2. Si vous finissez votre preuve sans utiliser une hypothèse, c'est a priori que votre raisonnement est erroné.

Comment réagir face aux quantificateurs

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire les hypothèses dans une rédaction.
2. Savoir traduire mathématiquement les hypothèses.
3. Identifier et écrire le but dans une rédaction.
4. Savoir traduire mathématiquement le but.
5. Savoir définir les objets utilisés.
6. Savoir conclure un raisonnement.

9 Que sont les quantificateurs

- $\forall$: pour tout, quel que soit.
- $\exists$: il existe.

La propriété $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ signifie que pour tout réel x, son carré est positif. La propriété $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ signifie qu'il existe un réel x tel que son carré est positif.

L'énoncé contraire de $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ est $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$.

10 Comment réagir

C'est très simple, **c'est exactement la même procédure que pour montrer une implication** : en effet une propriété avec $\forall$ se récrit à l'aide d'une implication.

• Pour un énoncé du type **"Montrer $\forall x \in E, P(x)$ est vrai" cela revient à montrer $x \in E \Longrightarrow P(x)$ est vrai.** On peut donc se référer à la fiche *Comment démontrer une implication/équivalence ?*. Ainsi la procédure est la suivante.

1. Ecrire les hypothèses : on part de x arbitraire dans E.
2. Ecrire la traduction mathématique des hypothèses.
3. Ecrire le but : démontrer que $P(x)$ est vraie.
4. Ecrire la traduction mathématique du but.
5. Observer si les traductions mathématiques des hypothèses et du but nous donnent une idée ou/et s'il nous semble qu'un théorème du cours sera nécessaire.
6. Démontrer que $P(x)$ est vraie et ce indépendamment du choix de x.

Exemple 1 $\star$:

Soient $F = \{x \in \mathbb{R} | x = \sqrt{x+2}\}$ et $E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 2 = 0\}$. Démontrer que $F \subset E$.

On veut montrer que $F \subset E$, c'est-à-dire que $\forall x \in F, x \in E$.

Soit $x \in F$,
alors $x = \sqrt{x+2}$.
On veut montrer que $x \in E$
c'est-à-dire que $x^2 - x - 2 = 0$.
On a envie de mettre au carré $x = \sqrt{x+2}$.
Or comme $x = \sqrt{x+2}$ alors $x^2 = \sqrt{x+2}^2 = x + 2$.
Donc $x^2 - x - 2 = 0$ et $x \in E$.

• Pour un énoncé du type : "Montrer $\exists x \in E, P(x)$ est vrai".

1. Ecrire le but.
2. Ecrire la traduction mathématique du but.
3. Trouver **un** x **particulier** vérifiant ce but et conclure.

Exemple 2 $\star$:

Montrer que $\exists a \in \mathbb{R}, f : x \mapsto x^2$ **croissante sur** $[a, +\infty[$

On veut montrer que : $\exists a \in \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ croissante sur $[a, +\infty[$
c'est-à-dire que $\exists a \in \mathbb{R}, f'$ positive sur $[a, +\infty[$.
Or $f'(x) = 2x$.
Donc $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) = 2x \geqslant 0$.
Donc $a = 0$ convient.

11 Autre exemple

Exemple 1 $\star$:

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \dfrac{|\cos(x)|}{x^2+1} \leq 1$ **cad que** $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{|\cos(x)|}{x^2+1} \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$,
on veut montrer que $0 \leq \dfrac{|\cos(x)|}{x^2+1} \leq 1$.
Or $x^2 + 1 \geqslant 1 \geqslant 0$.
Donc $0 \leq \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$.
Par ailleurs $0 \leq |\cos(x)| \leq 1$.
Donc $0 \leq \dfrac{|\cos(x)|}{x^2+1} \leq 1$.
Ceci est vrai pour tout x réel : donc $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \dfrac{|\cos(x)|}{x^2+1} \leq 1$.

12 Enoncé contraire

Il est parfois commode d'utiliser l'énoncé contraire : par exemple si on veut montrer que

$$\forall x \in E, P(x) \text{ est vraie,}$$

on peut montrer l'énoncé contraire :

$$\exists x \in E, P(x) \text{ est fausse.}$$

A l'inverse si on veut montrer que

$$\exists x \in E, P(x) \text{ est vraie,}$$

on peut montrer l'énoncé contraire :

$$\forall x \in E, P(x) \text{ est fausse.}$$

Fiche : Comment démontrer une inclusion/égalité d'ensembles

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire le but dans une rédaction : *pour tous les exercices*
2. Savoir traduire mathématiquement le but : *pour tous les exercices (parfois le but est déjà traduit)*
3. Savoir conclure un raisonnement : *pour tous les exercices*
4. Expliciter correctement les étapes de la démonstration d'une inclusion.
5. Expliciter correctement les étapes de la démonstration d'une égalité d'ensembles.

13 Méthodologie

13.1 Pour l'inclusion

Pour montrer que F est inclus dans E, on est à nouveau amené à démontrer une implication. Montrer que $F \subset E$ revient à montrer que $x \in F \Longrightarrow x \in E$. On peut donc se référer à la fiche *Comment démontrer une implication/équivalence ?* La procédure qui suit en découle.

1. Ecrire les hypothèses : prendre un élément arbitraire dans F
2. Ecrire la traduction mathématique des hypothèses : écrire les propriétés que vérifie cet élément
3. Ecrire le but : montrer que l'élément est dans E
4. Ecrire la traduction mathématique du but : écrire les propriétés que doit vérifier un élément de E
5. Observer si les traductions mathématiques des hypothèses et du but nous donnent une idée ou/et s'il nous semble qu'un théorème du cours sera nécessaire.
6. Montrer qu'il vérifie les propriétés de E et conclure.

Exemple 1 $\star$:

Soient $F = \{x \in \mathbb{R} | x = \sqrt{x+2}\}$ et $E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 2 = 0\}$. Démontrer que $F \subset E$.

Ceci revient à montrer $x \in F \Longrightarrow x \in E$.

Soit $x \in F$,
alors $x = \sqrt{x+2}$.
On veut montrer que $x \in E$
c'est-à-dire que $x^2 - x - 2 = 0$.
On a envie de mettre au carré $x = \sqrt{x+2}$.
Or comme $x = \sqrt{x+2}$ alors $x^2 = \sqrt{x+2}^2 = x + 2$.
Donc $x^2 - x - 2 = 0$ et $x \in E$.

Voici les éléments de langage que nous attendons lorsque vous montrez une inclusion

1. Prendre un élément arbitraire dans F : **Soit** $x \in F$
2. Ecrire les propriétés que vérifie cet élément (savoir traduire les hypothèses) : **Alors**
3. Ecrire le but (montrer que l'élément est dans E) : **Montrons que, on montre que**
4. Traduire le but : écrire les propriétés que doit vérifier cet élément : **c'est-à-dire que**
5. Conclure : **Donc**.

13.2 Pour l'égalité

$F = E$ est équivalent à $F \subset E$ et $E \subset F$. Il s'agit donc de démontrer la double inclusion. Autrement dit, on applique deux fois la méthodologie précédente.

1. Ecrire "Montrons $\boxed{\subset}$" : *(Cf exemple 2 partie 11)*
2. Suivre la démarche de l'inclusion ci-dessus.
3. Ecrire "Montrons $\boxed{\supset}$" : *(Cf exemple 2 partie 11)*
4. Suivre la démarche de l'inclusion ci-dessus.

14 Exemples

Exemple 2 $\star$:

Soient $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 6x + 5 \leq 0\}$ et $B = [1, 5]$. Montrer que $A = B$

La première étape consiste à trouver les racines de $x^2 - 6x + 5$ et à la factoriser sous la forme suivante $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$. (Faites-le en exo).

• Montrons $\boxed{\subset}$: (cad $x \in A \Longrightarrow x \in B$).

Soit $x \in A$,
alors $(x - 1)(x - 5) \leq 0$
On veut montrer que $x \in B$
c'est-à-dire que $1 \leq x \leq 5$.
Or comme $(x - 1)(x - 5) \leq 0$ alors $(x - 1 \leq 0$ et $x - 5 \geq 0)$ ou $(x - 1 \geq 0$ et $x - 5 \leq 0)$.
alors $(x \leq 1$ et $x \geq 5)$ ou $(x \geq 1$ et $x \leq 5)$.
Donc $1 \leq x \leq 5$, la première possibilité étant impossible. Donc $A \subset B$.

• Montrons $\boxed{\supset}$: (cad $x \in B \Longrightarrow x \in A$)
Soit $x \in B$,
alors $1 \leq x \leq 5$
On veut montrer que $x \in A$
c'est-à-dire que $(x - 1)(x - 5) \leq 0$.
Or $x - 1 \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$.
Donc $(x - 1)(x - 5) \leq 0$ et $B \subset A$.

Fiche : Comment démontrer une implication par l'absurde ou par contraposée.

Savoir faire de la fiche :

1. Identifier et écrire les hypothèses dans une rédaction.
2. Savoir traduire mathématiquement les hypothèses.
3. Identifier et écrire le but dans une rédaction.
4. Savoir traduire mathématiquement le but.
5. Savoir conclure un raisonnement.
6. Expliciter correctement les étapes de la démonstration d'une implication.
7. Savoir écrire la contraposée d'une propriété mathématique.

15 Qu'est-ce qu'un raisonnement par l'absurde

L'idée de ce type de raisonnement est de supposer que le but est faux et d'aboutir à une contradiction.

Supposons que l'on veuille montrer que $A \Longrightarrow B$ en faisant un raisonnement par l'absurde. Voici la démarche qui est légèrement différente des réflexes systématiques de la fiche centrale :

1. Ecrire l'hypothèse A.
2. Traduire mathématiquement l'hypothèse A.
3. Supposer par l'absurde que le but B est faux.
4. Traduire mathématiquement le fait que B soit faux.
5. A partir de A vrai et de B faux, arriver à une contradiction.
6. Conclure que B est vrai.

Exemple 1 $\star$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Supposons que n^2 soit pair,
alors $\exists q \in \mathbb{N}, n^2 = 2q$.
Supposons par l'absurde que n soit impair,
alors $\exists p \in \mathbb{N}, n = 2p + 1$.
Alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$. Or $n^2 = 2q$ donc $4p^2 + 4p + 1 = 2q$.
Ainsi $1 = 2(q - 2p^2 - 2p)$ ce qui signifie que 1 est pair.
Contradiction.
Donc n est pair.

16 Qu'est-ce que la contraposée

Soient P et Q deux propriétés. La contraposée de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est l'implication Non$Q \Longrightarrow$ Non$P$. Ces deux énoncés sont rigoureusement équivalents.

Pourquoi sont-ils équivalents ?

C'est un raisonnement par l'absurde qui est présenté dans les exemples.

Des exemples

Implication	Contraposée
$x \geq 0 \Longrightarrow x > -1$	$x \leq -1 \Longrightarrow x < 0$
$n \in \mathbb{N}$ et $n > 1 \Longrightarrow n \geq 2$	$n < 2 \Longrightarrow n \notin \mathbb{N}$ ou $n \leq 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ croissante sur $\mathbb{R}$	f non croissante sur $\mathbb{R} \Longrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 0$

A quoi peut servir la contraposée ?

Il arrive que Non$Q \Longrightarrow$ Non$P$ soit plus facile à démontrer que $P \Longrightarrow Q$. Dans ce cas, on démontre la contraposée au lieu de l'implication directe.

Quelle est la démarche pour démontrer une implication par contraposée ?

1. Ecrire la contraposée de l'implication.
2. Reprendre les étapes de la fiche "Comment démontrer une implication/équivalence" avec cette nouvelle implication !

Exemple 1 $\star$:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Nous montrons la contraposée de cet énoncé : si n est impair alors n^2 est impair.
Supposons que n soit impair,
alors $\exists p \in \mathbb{N}, n = 2p + 1$.
But : Montrer que n^2 est impair.
c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}, n^2 = 2q + 1$.
Or $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.
Donc $q = (2p^2 + 2p) \in \mathbb{N}$ convient.
Donc n^2 est impair.

17 Exemple de raisonnement par l'absurde

Exemple 2 $\star\star\star$:

Démontrer que $(P \Longrightarrow Q) \iff (\textbf{Non}Q \Longrightarrow \textbf{Non}P)$
• Montrons $\boxed{\Longrightarrow}$:
Supposons que $P \Longrightarrow Q$ soit vraie
c'est-à-dire que si P est vraie alors Q est vraie.
Supposons par l'absurde que Non$Q \Longrightarrow$ Non$P$ soit fausse
c'est-à-dire que Q soit fausse et que P soit vraie.
Alors comme $P \Longrightarrow Q$ est vraie, Q est vraie. Contradiction.
Donc P est fausse et on a bien Non$Q \Longrightarrow$ Non$P$.

• Montrons $\boxed{\Longleftarrow}$:
Supposons que Non$Q \Longrightarrow$ Non$P$ soit vraie
c'est-à-dire que si Q est fausse alors P est fausse.
Supposons par l'absurde que $P \Longrightarrow Q$ soit fausse
c'est-à-dire que P soit vraie et Q soit fausse.
Alors comme Non$Q \Longrightarrow$ Non$P$ est vraie, P est fausse. Contradiction.
Donc Q est vraie et on a bien $P \Longrightarrow Q$.

Cours : Les ensembles

18 Qu'est-ce qu'un ensemble

18.1 Définition, vocabulaire

Un ensemble est une collection d'objets appelés **éléments** chaque élément n'intervenant qu'une seule fois. Par exemple, l'ensemble contenant les éléments 1, 2 et 4 est noté entre accolades avec les éléments à l'intérieur :

$$\{1, 2, 4\}$$

On dit que les éléments 1, 2 et 4 appartiennent à $\{1, 2, 4\}$ et on note cela :

$$1 \in \{1, 2, 4\}, \quad 2 \in \{1, 2, 4\}, \quad 4 \in \{1, 2, 4\}$$

Un ensemble peut contenir toute sorte d'objets : $\{0, 1, licence, maths, \{1, 2, 4\}\}$ ensemble contenant les chiffres 0 et 1, les mots licence et maths mais aussi l'ensemble $\{1, 2, 4\}$.

Un ensemble peut être sans élément : il est alors appelé **ensemble vide** et est noté $\emptyset$. Il peut contenir un nombre indéterminé d'éléments : soit n un entier naturel, l'ensemble contenant tous les entiers de 1 à n se note

$$\{1, \dots, n\}$$

Un ensemble peut également contenir une infinité d'éléments.

18.2 La notation usuelle

Une notation commode a été introduite pour écrire efficacement les ensembles. Considérons l'ensemble des réels positifs : on l'écrit $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$. En français, c'est "l'ensemble des x appartenant aux réels tels que x est supérieur ou égal à 0". De manière général, un ensemble s'écrit sous la forme

$$\{x \in E | P(x)\}$$

Les accolades désignent le mot "ensemble". La partie $x \in E$ donne l'ensemble dans lequel on travaille, la seconde partie donne la propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble.

Voici d'autres exemples :

La droite $y = x$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \| y = x\}$
Le cercle de centre $(1, 2)$ de rayon 2	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \| (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\}$
L'ensemble des fonctions d'intégrale nulle sur $[0, 1]$	$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \| \int_0^1 f(t)dt = 0\}$
L'ensemble des fonctions nulles en 1	$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \| f(1) = 0\}$

18.3 Les classiques

Notation	Caractéristique	Quelques éléments
$\emptyset$	ensemble vide	
$\mathbb{R}$	ensemble des réels	$1, \sqrt{2}, 1/2$
$[a, b]$	ensemble des réels compris entre a et b	$a, b, \frac{a+b}{2}$
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels	$0, 1, 2$
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs	$-1, -10, 10, 0$
$\mathbb{Q}$	ensemble des rationnels	$-1/2, 1/3, 2, 0$
D	ensembles des nombres décimaux	$3/4, 1.12$
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes	$i, 1+i, 5$
$\mathbb{R}^2$	ensemble des vecteurs à deux coordonnées	$(1, 1), (-2, 3)$
$\mathbb{R}^3$	ensemble des vecteurs à trois coordonnées	$(1, 1, 0), (-2, 5, 3)$
$\mathcal{F}(A, B)$	ensemble des fonctions de A dans B	$\exp, \ln, x \mapsto x^2$ (à valeurs réelles)

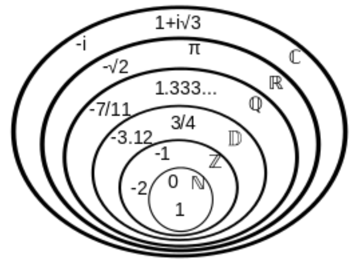
19 Qu'est-ce qu'une inclusion, une égalité ?

Soient E et F deux ensembles, on dit que :
• F est inclus dans E (noté $F \subset E$) si $\forall x \in F, x \in E$. Autrement dit tout élément de F est un élément de E.

• $F = E$ si $F \subset E$ et $E \subset F$ (s'il y a double inclusion).

Par exemple, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ car tout entier naturel est un nombre réel. On a la série d'inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



20 Produit cartésien d'ensembles

Soient E et F deux ensembles, le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$. En notation ensembliste

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}.$$

Exemples célèbres :

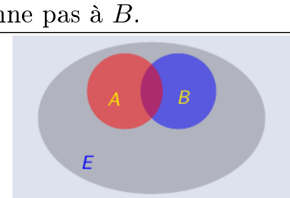
• $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. C'est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont l'abscisse est x et l'ordonnée est y.
• $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) tels que $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

21 Opération sur les ensembles

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Opération	Traduction
Union : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$	Ensemble des éléments de E tels que x appartient à A **ou** x appartient à B.
Intersection : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$	Ensemble des éléments de E tels que x appartient à A **et** x appartient à B.
Complémentaire : $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$	Ensemble des éléments de E tels que x n'appartienne pas à A
Différence : $A \backslash B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$	Ensemble des éléments de E tels que x appartienne à A et x n'appartienne pas à B.

L'intersection $A \cap B$ est donnée par la partie magenta.
L'union est l'ensemble des parties rouge et bleue.



On a les propriétés évidentes suivantes :

- $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$.
- $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$.

Hypothèses :

Traduction mathématique des hypothèses :

But :

Traduction mathématique du but :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

Hypothèses :

Traduction mathématique des hypothèses :

But :

Traduction mathématique du but :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

Hypothèses :

Traduction mathématique des hypothèses :

But :

Traduction mathématique du but :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

Hypothèses :

Traduction mathématique des hypothèses :

But :

Traduction mathématique du but :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

Hypothèses :

Traduction mathématique des hypothèses :

But :

Traduction mathématique du but :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

But :

Traduction mathématique du but :

Théorème/définition à appliquer :

Hypothèses à vérifier :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

But :

Traduction mathématique du but :

Théorème/définition à appliquer :

Hypothèses à vérifier :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

But :

Traduction mathématique du but :

Théorème/définition à appliquer :

Hypothèses à vérifier :

Suite de la rédaction :

Conclusion :

But :
Traduction mathématique du but :
Théorème/définition à appliquer :
Hypothèses à vérifier :
Suite de la rédaction :
Conclusion :